

# THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE  
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

**DIPLÔME DE DOCTEUR EN MÉTHODES D'APPROXIMATION  
ET ALGORITHMES EN ANALYSE ET THÉORIE DES NOMBRES**

par

**Ariel DUFETEL**

---

**INTERPOLATION NON LINÉAIRE  
ASSOCIÉE A UN OPÉRATEUR  $m$ -ACCRETIF  
DANS UN ESPACE DE BANACH**



Soutenue le

devant la Commission d'Examen :

MM. J. ROBERT

Président

Mme B. BEAUZAMY  
M.Th. LACROIX  
J.C. MIELLOU

Examineurs

*4° Diss. Besançon*



THÈSE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNOLOGIES DE  
L'UNIVERSITÉ DE QUÉBEC

Présentée par

DIPLOME DE DOCTEUR EN METHODES D'APPROXIMATION  
ET ALGÈBRE LINEAIRE

Digitized by the Internet Archive  
in 2026

ALAIN DUFRENE

INTERPOLATION NON LINEAIRE

ASSOCIEE A UN OPERATEUR MAGNETIF

DANS UN ESPACE DE BANACH



Reçu le

WU-4-G0004-1-001

WU-4-G0004-1-001

WU-4-G0004-1-001

[https://archive.org/details/IA41546618\\_0005](https://archive.org/details/IA41546618_0005)

WU-4-G0004-1-001

WU-4-G0004-1-001



# THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE  
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

**DIPLÔME DE DOCTEUR EN MÉTHODES D'APPROXIMATION  
ET ALGORITHMES EN ANALYSE ET THÉORIE DES NOMBRES**

par

**Ariel DUFETEL**

---

**INTERPOLATION NON LINÉAIRE  
ASSOCIÉE A UN OPÉRATEUR  $m$ -ACCRETIF  
DANS UN ESPACE DE BANACH**



Soutenue le

devant la Commission d'Examen :

MM. J. ROBERT

Président

Mme B. BEAUZAMY  
M.Th. LACROIX  
J.C. MIELLOU

Examineurs



## UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ BESANÇON

**Président : Monsieur le Professeur Pierre LÉVÊQUE**

**Président honoraire : Monsieur le Professeur Jean THIÉBAUT**

### FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

#### DOYEN

M. le Professeur Jean BULABOIS  
Physique Générale-optique

#### ASSESEURS

M. le Professeur Bernard MILLET  
Botanique  
M. Robert GUYETANT, Maître-Assistant  
Biol. animale Ecologie

#### DOYENS HONORAIRES

MM. GLANGEAUD, JACQUEMAIN, CHATELET,  
THIEBAUT, BERNARD

#### PROFESSEURS HONORAIRES

MM. BENNETON, CHATELET, MESNAGE, QUANTIN  
THEOBALD N., THIRY, TRILLAT, TRONCHET,  
UEBERSFELD

|                      |                                           |                      |                                    |
|----------------------|-------------------------------------------|----------------------|------------------------------------|
| MM. BANTEGNIE Robert | : Mathématiques                           | MIELLOU J.Claude     | : Analyse numérique                |
| BENILAN Philippe     | : Mathématiques                           | MILLET Bernard       | : Botanique                        |
| BERNARD Jean         | : Chimie Physique                         | MONTAGNER Hubert     | : Psychophysiologie                |
| BIDAULT Michel       | : Taxonomie expérimentale                 | MOREELS Guy          | : Astronomie                       |
| BROQUET Paul         | : Géologie                                | OLIVIER Marcel       | : Electroniq. quantique            |
| BRUCKERT Sylvain     | : Ecologie végétale                       | OYTANA Claude        | : Mécanique appliquée              |
| BULABOIS Jean        | : Physique Gle optique                    | PAGETTI Jacques      | : Chimie appliquée, Génie chimique |
| CAPODANNO Pierre     | : Mécanique théorique                     | PARIZET Jean         | : Mathématiques                    |
| CERUTTI Ernest       | : Chimie appliquée                        | PERROT Roger         | : Chimie générale                  |
| CHALEAT Raymond      | : Mécanique appliquée                     | PLUVINAGE Philippe   | : Physique théorique               |
| CHARDON J. Claude    | : Spectroscopie                           | POTIER Robert        | : Physique des solides             |
| CHAUVE Pierre        | : Géologie minéralogie                    | RANGHEARD Yves       | : Géologie                         |
| COUGNARD Jean        | : Mathématiques                           | REAL Pierre          | : Ecologie animale                 |
| DEVIN Claude         | : Chimie 1er cycle                        | RIPPLINGER Jean      | : Physiologie animale              |
| DOBREMEZ Jean-Fr.    | : Biologie                                | ROBERT Daniel        | : Physique                         |
| DUBOUCHET Jacques    | : Physiologie végétale                    | ROBERT Guy           | : Electrochimie                    |
| GALATRY Louis        | : Physique moléculaire                    | ROBERT Jacques       | : Mathématiques I                  |
| GAUDEMER Yves        | : Biochimie                               | THEOBALD J.-Gérard   | : Spectroscopie hertzienne         |
| GIRARDET Claude      | : Physique Moléculaire                    | THIEBAUT Jean        | : Pétrogr. minéralogie             |
| GOMOT Lucien         | : Zoologie-Embryologie                    | TREHEL Michel        | : Informatique                     |
| GOUARNE René         | : Mathématiques                           | VERNEAUX Jean        | : Zoologie-Embryologie             |
| GRAS Georges         | : Mathématiques                           | VIENTOT Jean-Charles | : Physique Gle optique             |
| GREMILLARD Jean      | : Mathématiques                           | WEIL Michel          | : Mathématiques                    |
| KARCHE J.Paul        | : Pétrographie Minéralogie                |                      |                                    |
| LALLEMENT Gérard     | : Mécanique appliquée                     |                      |                                    |
| LAUDE Bernard        | : Chimie organique                        |                      |                                    |
| LESAINTE Pierre      | : Mathématiques I                         |                      |                                    |
| LHOTE François       | : Automatique                             |                      |                                    |
| MERIGOUX Henri       | : Cristallographie et Synthèses minérales |                      |                                    |

**Responsable des services administratifs :**  
M. Jean-Marie RUNGE



Monsieur J. Robert m'a fait l'honneur d'accepter de présider le Jury . Je l'en remercie très chaleureusement .

Je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance à Madame M. Th. Lacroix , qui a guidé mes premiers pas dans la recherche mathématique et qui m'a initié au problème de l'interpolation . J'ai en particulier apprécié les discussions stimulantes que nous avons eues tout au cours de ce travail . Qu'elle trouve ici l'expression de ma profonde gratitude .

Je suis vivement reconnaissant à Monsieur B. Beauzamy et Monsieur J. C. Miellou pour leur participation au Jury .

Je témoigne toute mon amitié au Séminaire d'Analyse non linéaire de Besançon et plus particulièrement à M. Ph. Bénilan pour les conseils qu'il m'a donnés .

Je voudrais enfin remercier ceux qui avec compétence , ont permis la réalisation matérielle de cette thèse :

Th. ~~perce~~ pour la dactylographie et R. ~~un~~ pour le tirage .



## INTRODUCTION

De nombreux auteurs , pour lesquels Lions et Peetre ( [9] ) ont étudié l'interpolation linéaire qui à deux espaces de Banach associent un troisième espace de Banach . En particulier ils appliquent leurs résultats au cas où l'un des espaces est le domaine d'un opérateur linéaire , non borné , dans un espace de Hilbert  $H$  , l'autre espace étant  $H$  . Plus récemment D. Brézis ( [4] ) a étendu les résultats linéaires au cas d'opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert .

Si  $A$  désigne un opérateur maximal monotone de domaine  $D(A) \subset H$ ,  $\alpha$  un élément de  $]0, 1[$  ,  $p$  un élément de  $[1, +\infty[$  ,  $J_t A$  la résolvante de l'opérateur  $A$  , D. Brézis a introduit les ensembles :

$$D_{\alpha, p} = \left\{ u_0 \in \overline{D(A)} / t^{-\alpha} \|u_0 - J_t u_0\| \in L_*^p(0, 1) \right\}$$

tels que  $D(A) \subset D_{\alpha, p} \subset \overline{D(A)}$  ; ces ensembles appelés classe d'interpolation vérifiant de nombreuses propriétés, il est alors naturel d'essayer d'étendre certains de ces résultats à des opérateurs  $m$ -accrétifs dans un espace de Banach quelconque .

Dans une première partie on définit des ensembles  $D_{\alpha, p}$  de la même façon que D. Brézis et on retrouve pour un opérateur  $m$ -accrétif dans un espace de Banach quelconque la méthode des sommes et la méthode  $K$  .

Ainsi par exemple l'analogue non linéaire de la méthode  $K$  s'énonce de la manière suivante :

$$\text{soit } u_0 \in \overline{D(A)} \quad K(t, u_0) = \inf_{v \in D(A)} (t |Av| + 2 \|u_0 - v\|)$$

alors  $u_0 \in D_{\alpha, p} \Leftrightarrow t^{-\alpha} K(t, u_0) \in L_*^p(0, 1)$  .

On obtient aussi la méthode des traces mais dans le cadre d'espace de Banach réflexif ou à dual séparable ; on généralisera ce résultat



tat au cas d'un espace de Banach quelconque dans une troisième partie grâce à une caractérisation des ensembles  $D_{\alpha, p}$  à l'aide de la dérivée de la variation bornée de la résolvante de l'opérateur  $A$ .

On établit également un théorème d'interpolation. On montre que dans un espace de Banach quelconque et sous certaines hypothèses que si  $T$  applique  $D(A_1)$  dans  $D(A_2)$  et  $\overline{D(A_1)}$  dans  $\overline{D(A_2)}$  alors  $T$  applique  $D_{\alpha, p}(A_1)$  dans  $D_{\alpha, p}(A_2)$ .

Dans une seconde partie on montre que l'on peut remplacer la résolvante de  $A$  par le semi-groupe engendré par l'opérateur  $-A$  dans la définition des classes d'interpolation  $D_{\alpha, p}$ .

Dans une troisième partie on s'intéresse à la classe d'interpolation associée à une somme d'opérateurs  $m$ -accrétifs ; dans un espace de Banach dont le dual est uniformément convexe, on montre que si  $A$  et  $B$  sont deux opérateurs  $m$ -accrétifs,  $B$  dominé par  $A$ , alors :

$$D_{\alpha, p}(A+B) = D_{\alpha, p}(A).$$

Dans une quatrième partie on caractérise les ensembles d'interpolation dans le cas de semi-groupe régularisant en particulier on montre que si  $X$  est un espace de Banach uniformément convexe ainsi que son dual,  $A$  un opérateur  $m$ -accrétif de  $X$  dont le semi-groupe associé à  $-A$  est régularisant alors :

$$u_0 \in D_{\alpha, p} \Leftrightarrow S(t)u_0 \in W^{\alpha + \frac{1}{p}; p}(0, 1).$$

Après avoir caractérisé l'accrétivité dans certains espaces d'Orlicz on montre que, pour un opérateur donné, les ensembles  $D_{\alpha, p}$  coïncident avec un espace de Lorentz.





# TABLE DES MATIERES

## Introduction .-

|                |                                                                                                                   |                    |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| CHAPITRE 0 :   | Rappels .                                                                                                         |                    |
| Partie A :     | Généralités .....                                                                                                 | 0.1                |
| Partie B :     | Fonctions à variation bornée et fonctions<br>absolument continues .....                                           | 0.4                |
| CHAPITRE I :   | Ensemble intermédiaire et théorème<br>d'interpolation .                                                           |                    |
| Partie A :     | Définitions et propriétés caractéristiques .....                                                                  | I.1                |
| Partie B :     | Méthode des traces et des sommes .<br>Méthode K et théorème d'interpolation.....                                  | I.11               |
| CHAPITRE II :  | Caractérisation des ensembles d'interpolation<br>à l'aide des semi-groupes .                                      |                    |
| Partie A :     | Rappel .....                                                                                                      | II.1               |
| Partie B :     | Caractérisation des ensembles d'interpolation<br>à l'aide du semi-groupe engendré par l'opéra-<br>teur $-A$ ..... | II.4               |
| CHAPITRE III : | Généralisation et ensemble d'interpolation asso-<br>cié à une somme d'opérateurs .                                |                    |
| Partie A :     | Généralisation de la méthode des traces .....                                                                     | III.1              |
| Partie B :     | Classes d'interpolation associées à une somme<br>d'opérateurs $m$ - accréatifs .....                              | III.4              |
| CHAPITRE IV :  | Caractérisation des ensembles d'interpolation<br>dans le cas d'un semi-groupe régularisant .....                  | IV.1<br>à<br>IV.14 |
| CHAPITRE V :   | Application .                                                                                                     |                    |
| Partie A :     | Accrétivité dans certains espaces d'Orlicz.....                                                                   | V.1                |
| Partie B :     | Caractérisation d'ensembles intermédiaires ....                                                                   | V.5                |

## Bibliographie .-



## CHAPITRE 0

### RAPPELS

On désigne par  $X$  un espace de Banach réel et  $X'$  son dual topologique. On note  $\|\cdot\|_X$  (resp.  $\|\cdot\|_{X'}$ ) la norme dans  $X$  (resp.  $X'$ ) et  $\|\cdot\|$  quand il n'y a pas d'ambiguïté. On désigne par  $\sigma(X', X)$  la topologie de dual faible sur  $X'$  [ 3 ]. L'ensemble des parties de  $X$  sera noté  $\mathfrak{P}(X)$ .

Partie A : Généralités [ 1 ].

Définition 1 .

Soit  $X$  un espace de Banach réel, quels que soient  $x$  et  $y$  éléments de  $X$ , on appelle produit semi-intérieur de  $x$  et  $y$  et on note :

$$\tau(x, y) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda} .$$

Proposition 2 .

Le produit semi-intérieur vérifie les propriétés suivantes:

- 1)  $\forall y \in X \quad \tau(0, y) \leq \|y\|$  .
- 2)  $\forall (x, y) \in X^2 \quad \forall \lambda > 0 \quad \tau(\lambda x, y) = \tau(x, y)$  .
- 3)  $\tau$  est sous-linéaire en  $y$  .
- 4)  $\tau$  est s.c.s. en  $x$  et  $y$  .
- 5)  $\forall \mu \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (x, y) \in X^2 \quad \tau(x, y + \mu x) = \tau(x, y) + \mu \|x\|$  .
- 6)  $\forall (x, y) \in X^2 \quad \tau(x, y) \leq \|y\|$  .



Définition 3 .

Soit  $X$  un espace de Banach réel ,  $X'$  son dual .

On appelle application de dualité l'application :

$$J : x \in X \mapsto \left\{ w \in X' / \|w\|_{X'} \leq 1 \text{ et } \langle w, x \rangle_{X', X} = \|x\|_X \right\} .$$

Proposition 4 .

L'application de dualité  $J$  vérifie les propriétés suivantes :

- 1)  $\forall x \in X$   $J(x)$  est un convexe , fermé , non vide de  $X'$  qui est  $\sigma(X', X)$ -compact .
- 2)  $J$  est le sous-différentiel de la norme ( c'est-à-dire  $w \in J(x) \Leftrightarrow \forall y \in X \quad \|y\| \geq \|x\| + \langle w, y-x \rangle_{X', X}$  ) donc monotone.
- 3)  $\forall (x, y) \in X^2$  on a  $\tau(x, y) = \text{Max} \left\{ \langle w, y \rangle_{X', X} \text{ pour } w \in J(x) \right\}$ .

Définition 5 .

Soit  $X$  un espace de Banach réel . On dit que  $A$  est un opérateur de  $X$  si c'est une application de  $X$  dans  $\mathcal{B}(X)$  dont le graphe noté  $G(A)$  est défini :

$$G(A) = \{ (x, y) \in X \times X / y \in Ax \} .$$

Le domaine  $D(A)$  de  $A$  est l'ensemble des  $x \in X$  tel qu'il existe  $y \in X$  vérifiant  $(x, y) \in G(A)$  .

L'image  $R(A)$  de  $A$  est l'ensemble des  $y \in X$  tel qu'il existe  $x \in D(A)$  vérifiant  $(x, y) \in G(A)$  . Pour  $\lambda \geq 0$  on pose  $D_\lambda = R(I + \lambda A)$  .

On dira que  $A$  est un opérateur accréatif s'il vérifie l'une des trois conditions suivantes qui sont équivalentes ( [ 2 ] ) :

$$\forall (x, y) \in G(A) , \quad \forall (\hat{x}, \hat{y}) \in G(A) ,$$

$$1) \quad \forall \lambda > 0 \quad \|x - \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x} + \lambda(y - \hat{y})\|$$

$$2) \quad \tau(x - \hat{x}, y - \hat{y}) \geq 0$$

$$3) \quad \exists w \in J(x - \hat{x}) \quad \langle w, y - \hat{y} \rangle_{X', X} \geq 0 .$$



On dira que  $A$  est un opérateur  $m$ -accrétif de  $X$  s'il est accréatif et s'il vérifie  $\forall \lambda > 0 \quad D_\lambda = X$ .

### Définition 6 .

Soit  $X$  un espace de Banach réel ,  $A$  un opérateur accréatif de  $X$  . On définit la résolvente de  $A$  comme l'application :

$$\forall x \in D_\lambda \quad J_\lambda x = (I + \lambda A)^{-1} x$$

et la régularisée Yosida de  $A$  comme l'application :

$$\forall x \in D_\lambda \quad A_\lambda x = \frac{x - J_\lambda x}{\lambda} .$$

### Proposition 7 .

Soit  $X$  un espace de Banach réel ,  $A$  un opérateur accréatif de  $X$  . On a les propriétés suivantes :

- 1)  $\forall (x, y) \in D_\lambda^2 \quad \|J_\lambda x - J_\lambda y\| \leq \|x - y\|$
- 2)  $A_\lambda$  est accréatif , lipschitzienne de rapport  $\frac{2}{\lambda}$
- 3)  $\forall x \in D(A) \cap D_\lambda \quad \|A_\lambda x\| \leq |Ax|$  avec :  
 $|Ax| = \inf \{ \|y\| / (x, y) \in G(A) \} .$
- 4)  $\forall x \in D_\lambda \quad A_\lambda x \in A J_\lambda x$
- 5)  $\forall x \in \overline{D(A)} \cap D_\lambda \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda x = x$
- 6)  $\forall x \in D_\lambda \cap D(A) \quad \|x - J_\lambda x\| \leq \lambda |Ax|$
- 7)  $\forall x \in D_\lambda \cap D_\mu \quad A_{\lambda+\mu} x = (A_\lambda)_\mu x$
- 8)  $\forall x \in D_\lambda , \forall \mu > 0$  si  $\frac{\mu}{\lambda} x + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) J_\lambda x \in D_\mu$  on a :  
 $J_\lambda x = J_\mu \left( \frac{\mu}{\lambda} x + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) J_\lambda x \right) .$

### Notation :

On est amené à considérer pour un réel  $p \in [1, +\infty[$  , l'espace des classes de fonctions définies sur tout sous-ensemble  $]0, T[$  de  $\mathbb{R}^+$  à valeurs dans  $X$  , fortement mesurables , dont la norme à la puissance  $p$  est intégrable pour la mesure  $\frac{dt}{t}$  sur  $]0, T[$  et on note :



$$L_*^p(0, T; X) = \left\{ f / \int_0^T \|f(t)\|^p \frac{dt}{t} < +\infty \right\}$$

et pour  $p = +\infty$  on note :

$$L_*^\infty(0, T; X) = \left\{ f / \sup_{t \in ]0, T[} \|f(t)\| < +\infty \right\}.$$

Pour le cas où  $X = \mathbb{R}$  on note ces espaces respectivement :

$$L_*^p(0, T) \quad \text{et} \quad L_*^\infty(0, T).$$

Partie B :    Fonctions à variation bornée et fonctions absolument continues [ 5 ] .

Soient  $X$  un espace de Banach réel et  $T$  un réel positif.

Définition 8 .

Etant donné une fonction  $f$  de  $[0, T]$  dans  $X$ , on appelle variation totale de  $f$  sur  $[0, T]$  l'expression :

$$\text{Var}(f, [0, T]) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} \|f(a_k) - f(a_{k-1})\| \text{ pour toutes les subdivisions } 0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = T \right\}.$$
 Si  $\text{Var}(f, [0, T]) < +\infty$  on dit que  $f$  est à variation bornée ; on désigne par  $VB(0, T; X)$  l'espace des fonctions à variation bornée de  $[0, T]$  dans  $X$ .

Pour simplifier les notations on pose  $V_f(t) = \text{Var}(f, [t, T])$ .

Définition 9 .

On dit qu'une fonction  $f$  de  $[0, T]$  dans  $X$  est absolument continue si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour toute suite d'intervalles  $I_n = ]\alpha_n, \beta_n[$  deux à deux disjoints vérifiant  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\beta_n - \alpha_n| \leq \eta$  on ait

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f(\beta_n) - f(\alpha_n)\| \leq \epsilon.$$



Remarque .

On vérifie facilement que toute fonction  $f$  absolument continue est à variation bornée ; de plus la fonction  $t \mapsto V_f(t)$  est absolument continue , à valeurs réelles et décroissante ; donc elle est presque partout dérivable et on a :

$$V_f(t) = \int_t^T - \frac{d}{dt} V_f(s) ds .$$

Par suite :

$$\|f(t) - f(s)\| \leq \int_s^t - \frac{d}{dt} V_f(\xi) d\xi \text{ pour tout } 0 \leq s \leq t \leq T .$$

Définition 10 [ 5 ] .

On désigne par  $W^{1,p}(0,T;X)$  l'ensemble des ( classes d') applications  $f$  de  $[0,T]$  dans  $X$  pour lesquelles il existe  $g$  , élément de  $L^p(0,T;X)$  tel que :

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s) ds \quad \forall t \in [0,T] ;$$

et par  $\tilde{W}^{1,p}(0,T;X)$  l'espace des fonctions absolument continues de  $[0,T]$  dans  $X$  telles que  $\frac{d}{dt} V_f(t)$  soit un élément de  $L^p(0,T;\mathbb{R})$  .

Remarque .

1) Il est immédiat que  $\tilde{W}^{1,1}(0,T;X)$  coïncide avec l'espace des fonctions absolument continues de  $[0,T]$  dans  $X$  et  $\tilde{W}^{1,\infty}(0,T;X)$  coïncide avec l'espace des fonctions lipschitziennes de  $[0,T]$  dans  $X$  .

2) On a  $W^{1,p}(0,T;X) \subset \tilde{W}^{1,p}(0,T;X)$   
et l'inclusion est stricte en général .

Proposition 11 .

Soit  $f \in \tilde{W}^{1,p}(0,T;X)$  avec  $1 \leq p < +\infty$  .

Alors on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right\| = - \frac{d}{dt} V_f(t) \quad \text{p.p. sur } ]0,T[ .$$



Proposition 12 .

On suppose que  $X$  est un espace de Banach réflexif ou un espace de Banach à dual séparable . Alors :

$$W^{1,p}(0, T; X) = \tilde{W}^{1,p}(0, T; X) \text{ pour tout } 1 \leq p \leq +\infty .$$

Autrement dit , toute fonction absolument continue est dérivable presque partout et on a :

$$f(t) = f(0) + \int_0^t \frac{d}{ds} f(s) ds .$$

Démonstration .

i)  $X$  est réflexif :

voir la démonstration dans H. Brézis : Opérateurs maximaux monotones [ 5 ] corollaire A.2 p. 145 .

ii)  $X$  est un espace de Banach à dual séparable .

Soit  $f$  un élément de  $VB(0, T; X)$  ; alors  $f$  est presque partout à valeurs séparables. Soit  $X_0$  l'espace fermé engendré par  $f([0, T])$ . On sait que  $X'_0$  est isomorphe à  $X' / X_0^0$  où  $X_0^0$  désigne l'ensemble des éléments  $y$  de  $X'$  tels que  $\langle y, x \rangle_{X', X_0} = 0$  pour tout  $x$  élément de  $X_0$  ( cf. [ 3 ] ) . Or  $X'$  est séparable donc on en déduit que  $X'_0$  est un espace séparable, on adapte alors la démonstration faite dans le cas réflexif.

Remarque [8] .

Certains espaces d'Orlicz sont des espaces de Banach à dual séparable.

Plus précisément on appelle fonction de Young toute application  $M$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^+$  convexe , paire , dont la restriction à  $\mathbb{R}^+$  est injective et qui vérifie :  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{M(t)}{t} = 0$  ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M(t)}{t} = +\infty$  .

La fonction  $N$  , polaire de  $M$  , paire définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$N(s) = \sup_{t \geq 0} [st - M(t)]$  est aussi une fonction de Young . On peut

citer comme exemples  $T_p : t \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{|t|^p}{p}$   $p \in ]1, +\infty[$  , de polaire  $T_q$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ;  $M(t) = t^2 \exp(t^2)$  .



Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathfrak{M}$  l'espace des (classes de) fonctions numériques Lebesgue-mesurables sur  $\Omega$ .

On appelle classe d'Orlicz et on note :

$$C_M(\Omega) = \left\{ f \in \mathfrak{M} / \int_{\Omega} M(f(x)) \, dx < +\infty \right\}.$$

Cet ensemble est convexe et équilibré, on lui associe deux espaces vectoriels, dits espaces d'Orlicz, l'un noté :

$$L_M(\Omega) = \left\{ f \in \mathfrak{M} / \exists \alpha > 0 \int_{\Omega} M(\alpha f(x)) \, dx < +\infty \right\},$$

l'autre :

$$E_M(\Omega) = \left\{ f \in \mathfrak{M} / \forall \alpha > 0 \int_{\Omega} M(\alpha f(x)) \, dx < +\infty \right\}.$$

Ce sont des espaces de Banach pour la jauge associée à la classe d'Orlicz, et l'espace  $E_M(\Omega)$  est séparable.

Si  $M$  vérifie une condition dite  $\Delta_2$  ( $\exists t_0, t_1 > 0 \exists a > 0 (\forall t \leq t_0 \text{ et } t \geq t_1 \text{ on a } M(2t) \leq aM(t))$ ), alors  $E_M(\Omega) = C_M(\Omega) = L_M(\Omega)$ .

Si  $M$  et  $N$  sont deux fonctions de Young mutuellement polaires, le dual de  $E_M(\Omega)$  est isomorphe à  $L_N(\Omega)$ .

Dans le cas de la fonction de Young  $M(t) = t^2 \exp(t^2)$ , l'espace  $E_M(\Omega)$  n'est pas réflexif, mais son dual  $L_N(\Omega) = E_N(\Omega)$  est séparable.

Le résultat de la proposition 12 s'applique à tout espace d'Orlicz  $E_M(\Omega)$  pour lequel la fonction de Young  $N$ , polaire de  $M$ , vérifie la condition  $\Delta_2$ .



## CHAPITRE I

### ENSEMBLE INTERMEDIAIRE ET THEOREME D'INTERPOLATION

---

Etant donné un opérateur non linéaire  $A$  d'un espace de Banach  $X$ , on s'efforce de construire des ensembles intermédiaires entre le domaine  $D(A)$  de l'opérateur et son adhérence  $\overline{D(A)}$  dans  $X$ .

Dans ce chapitre on utilise la construction de tels ensembles au moyen de la résolvante de  $A$ . Pour un opérateur  $m$ -accrétif et dans le cas d'espace de Banach réflexif on retrouve les caractérisations mises en évidence par D. Brézis dans le cas hilbertien. On établit également certaines propriétés pour des espaces de Banach quelconques.

#### Partie A :     Définitions et propriétés caractéristiques .

##### Définition 1.1 .

Soit  $X$  un espace de Banach réel,  $A$  un opérateur  $m$ -accrétif de  $X$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $p \in [1, +\infty]$ .

On appelle ensemble intermédiaire d'ordre  $\alpha$  et on note :

$$D_{\alpha, p} = \left\{ u_0 \in \overline{D(A)} / t^{-\alpha} \|u_0 - J_t u_0\| \in L_*^p(0, 1) \right\}.$$

##### Remarque .

Dans le cas linéaire  $\forall u_0 \in X \quad \|J_t u_0\| \leq \|u_0\|$  ; par suite  $t^{-\alpha} \|u_0 - J_t u_0\| \in L_*^p(0, +\infty)$ . Par contre dans le cas non linéaire  $J_t u_0$  ne reste pas nécessairement borné ; il convient alors de travailler sur  $]0, 1[$  au lieu de  $\mathbf{R}^+$  puisque de toute manière seul le comportement au voisinage de  $t = 0$  intervient (cf. [ 4 ] ). De même dans le cas linéaire  $D(A)$ ,  $D_{\alpha, p}$  sont des sous-espaces vectoriels de  $X$  ce qui n'est pas en général le cas pour un opérateur non linéaire.



Proposition 1.2 .

Les ensembles intermédiaires  $D_{\alpha, p}$  vérifient les inclusions :

$$D(A) \subset D_{\alpha, p} \subset \overline{D(A)} .$$

Démonstration .

On montre que  $D(A) \subset D_{\alpha, p}$  l'autre inclusion étant évidente .

On sait que :

$$\forall u_0 \in D(A) \quad \|u_0 - J_t u_0\| \leq t |A u_0| \quad (1) \quad (\text{prop. 7.(6)}) .$$

i) Si  $p = +\infty$ , soit  $u_0 \in D(A)$  ; de la majoration (1) et comme on a  $\alpha \in ]0, 1[$  on déduit facilement que  $\sup_{t \in ]0, 1[} t^{-\alpha} \|u_0 - J_t u_0\| < \infty$  .

ii) Si  $p \in [1, +\infty[$ , pour  $u_0 \in D(A)$  on déduit de (1) :

$$\int_0^1 t^{-1-\alpha p} \|u_0 - J_t u_0\|^p dt \leq |A u_0|^p \int_0^1 t^{p(1-\alpha)-1} dt \quad (2) .$$

Comme  $\alpha \in ]0, 1[$  l'intégrale  $\int_0^1 t^{p(1-\alpha)-1} dt$  est finie et l'inégalité

(2) montre que :

$$t^{-\alpha} \|u_0 - J_t u_0\| \in L_*^p(0, 1)$$

ce qui permet dans les deux cas de conclure .

Lemme 1.3 .

Soit  $X$  un espace de Banach réel ,  $A$  un opérateur  $m$ -accrétif de  $X$  ;  $\forall u_0 \in X$  l'application :

$$t \in ]0, +\infty[ \mapsto \|A_t u_0\|$$

est décroissante .

Démonstration .

Pour  $t > 0$  , l'opérateur  $A_t$  est  $m$ -accrétif de domaine  $X$  ; on peut lui appliquer le résultat de la proposition 7. (7) .



On en déduit  $\forall u_0 \in X$  et  $\forall h > 0$  :

$$\|A_{t+h} u_0\| \leq \|(A_t)_h u_0\| \leq \|A_t u_0\|.$$

Proposition 1.4.

On montre les inclusions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} D_{\alpha, p} \subset D_{\alpha, q} & \text{pour } 1 \leq p \leq q \leq +\infty, \alpha \in ]0, 1[ \\ D_{\alpha, p} \subset D_{\alpha', q} & \text{pour } 0 < \alpha' < \alpha < 1, \forall (p, q) \in [1, +\infty]^2. \end{array} \right.$$

Démonstration.

i) On montre d'abord que  $D_{\alpha, p} \subset D_{\alpha, +\infty}$ .

Soit  $u_0 \in D_{\alpha, p}$  ; en utilisant le résultat du lemme 1.3, on a :

$$\begin{aligned} t^{-p} \|u_0 - J_t u_0\|^p & \int_0^t s^{(1-\alpha)p-1} ds \leq \int_0^t s^{-1-\alpha p} \|u_0 - J_s u_0\|^p ds \leq \\ & \leq \int_0^1 s^{-\alpha p-1} \|u_0 - J_s u_0\|^p ds = C \end{aligned} \quad (1)$$

soit  $\forall t \in ]0, 1[$   $t^{-p} \|u_0 - J_t u_0\|^p \leq C < +\infty$

d'où comme  $\alpha \in ]0, 1[$  :

$$t^{-\alpha} \|u_0 - J_t u_0\| \leq C^{\frac{1}{p}} \text{ donc } u_0 \in D_{\alpha, +\infty}.$$

Pour  $p \leq q$  on montre alors que  $D_{\alpha, p} \subset D_{\alpha, q}$ .

Soit  $u_0 \in D_{\alpha, p}$  ; comme  $u_0 \in D_{\alpha, +\infty}$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{-\alpha q-1} \|u_0 - J_t u_0\|^q dt & = \int_0^1 t^{-\alpha(q-p)} \|u_0 - J_t u_0\|^{q-p} \cdot t^{-\alpha p-1} \|u_0 - J_t u_0\|^p dt \\ & \leq \left[ \sup_{t \in ]0, 1[} t^{-\alpha} \|u_0 - J_t u_0\| \right]^{q-p} \cdot \int_0^1 t^{-\alpha p-1} \|u_0 - J_t u_0\|^p dt < +\infty \end{aligned}$$

soit  $u_0 \in D_{\alpha, q}$ , ce qui montre la première inclusion.

ii) Pour  $0 < \alpha' < \alpha < 1$ ,  $\forall (p, q) \in [1, +\infty]^2$  on montre que

$$D_{\alpha, p} \subset D_{\alpha', q}.$$

Soit  $u_0 \in D_{\alpha, p} \subset D_{\alpha, +\infty}$ . On a :



$$\int_0^1 t^{-\alpha'q-1} \|u_0 - J_t u_0\|^q dt = \int_0^1 t^{-\alpha q} \|u_0 - J_t u_0\|^q \cdot t^{q(\alpha-\alpha')-1} dt$$

$$\leq \left[ \sup_{t \in ]0,1[} t^{-\alpha} \|u_0 - J_t u_0\| \right]^q \cdot \int_0^1 t^{q(\alpha-\alpha')-1} dt < +\infty$$

soit  $u_0 \in D_{\alpha',q}$  ce qui prouve la deuxième inclusion .

### Remarque .

Pour  $u_0 \in D_{\alpha,p}$  avec  $p < +\infty$  on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\alpha} \|u_0 - J_t u_0\| = 0 .$$

En effet si on pose  $H_t = \int_0^t s^{-\alpha p-1} \|u_0 - J_s u_0\|^p ds$  d'après l'inégalité

(1) on déduit :

$$\left( t^{-1} \|u_0 - J_t u_0\| \right)^p t^{p(1-\alpha)} \leq p(1-\alpha) H_t$$

d'où :

$$t^{-\alpha} \|u_0 - J_t u_0\| \leq \left[ p(1-\alpha) H_t \right]^{\frac{1}{p}} .$$

Comme  $u_0 \in D_{\alpha,p}$   $\lim_{t \rightarrow 0} H_t = 0$  et donc  $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\alpha} \|u_0 - J_t u_0\| = 0$  .

Les propriétés de  $D_{\alpha,p}$  établissent le fait que , si  $u_0 \in D_{\alpha,p}$  alors  $J_t u_0$  converge vers  $u_0$  plus vite que  $t^\alpha$  .

### Lemme 1.5 .

Soit  $X$  un espace de Banach réel ,  $A$  un opérateur  $m$ -accrétif de  $X$  . Pour tout  $u_0$  de  $X$  l'application :

$$t \in ]0, +\infty[ \mapsto J_t u_0 \in X$$

est localement lipschitzienne .

Si  $X$  est réflexif ou à dual séparable , elle est presque partout dérivable et on a :

$$\left\| \frac{d}{dt} J_t u_0 \right\| \leq \|A_t u_0\| \quad \text{p.p. } t \in ]0,1[ .$$

De plus si la norme est dérivable au sens de Gateaux [ 1 ] on a :

$$\left\| \frac{d}{dt} J_t u_0 \right\| \leq |A J_t u_0| \leq \|A_t u_0\| \quad \text{p.p. } t \in ]0,1[ .$$



Remarques .

1) Lorsque  $X$  est un espace de Banach à dual séparable ou réflexif , dont la norme est dérivable au sens de Gateaux , on obtient le même résultat que D. Brézis .

2) Dans un espace de Banach réflexif , il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes [ 1 ] :

i) la norme est dérivable au sens de Gateaux

ii)  $X'$  est strictement convexe .

3) Ce résultat s'applique lorsque  $X$  est un espace  $L^p(\Omega)$  où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $p$  un élément de  $]1, +\infty[$  . En effet , dans ce cas ,  $L^p(\Omega)$  est réflexif et son dual  $L^q(\Omega)$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  est strictement convexe ( cf. [ 1 ] ) .

4) Le résultat s'applique aussi au cas où  $X = E_M(\Omega)$  est l'espace d'Orlicz , lorsque le dual de  $E_M(\Omega)$  est isomorphe à  $E_N(\Omega)$  ( Remarque prop.12 ) .

Démonstration .

Soit  $u_0$  donné de  $X$  .

On décompose la démonstration en 3 parties .

a) On montre que l'application :  $t \in ]0, +\infty[ \mapsto J_t u_0 \in X$  est localement lipschitzienne .

Plus précisément , soit  $t_0 \in ]0, +\infty[$  ; il existe une constante  $k(t_0) > 0$  telle que :

$$\forall (t, t') \in [t_0, +\infty[^2 \quad \|J_t u_0 - J_{t'} u_0\| \leq k(t_0) |t - t'| \quad (1)$$

$\forall u_0 \in X$  comme  $A$  est  $m$ -accrétif et d'après la proposition 7.(8) :

$$J_{t'} u_0 = J_t \left[ \frac{t}{t'} u_0 + \left( 1 - \frac{t}{t'} \right) J_{t'} u_0 \right]$$

$$\|J_t u_0 - J_{t'} u_0\| = \|J_t u_0 - J_t \left[ \frac{t}{t'} u_0 + \left( 1 - \frac{t}{t'} \right) J_{t'} u_0 \right]\|$$

$$\|J_t u_0 - J_{t'} u_0\| \leq \|u_0 - \frac{t}{t'} u_0 - \left( 1 - \frac{t}{t'} \right) J_{t'} u_0\| \quad (\text{prop. 7. (1)})$$

$$\|J_t u_0 - J_{t'} u_0\| \leq \frac{1}{t'} \|(t' - t) u_0 - (t' - t) J_{t'} u_0\|$$



$$\|J_t u_0 - J_{t'} u_0\| \leq |t - t'| \|A_{t'} u_0\| \quad (2)$$

De (2) et du résultat du lemme 1.3 on déduit :

$$\|J_t u_0 - J_{t'} u_0\| \leq |t - t'| \|A_{t_0} u_0\|$$

ce qui établit l'inégalité (1) .

Ainsi  $\forall t_0 > 0$  l'application  $t \mapsto J_t u_0$  est lipschitzienne sur  $[t_0, +\infty[$  donc absolument continue ; comme  $X$  est réflexif ou à dual séparable d'après la proposition 12 elle est presque partout dérivable.

Comme  $]0, +\infty[ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[ \frac{1}{n}, +\infty[ \right.$  on en déduit que  $t \mapsto J_t u_0$  est presque partout dérivable sur  $]0, +\infty[$  .

b) D'autre part  $\forall (t, t') \in ]0, +\infty[^2$  on a :

$$J_{t'} u_0 - J_t u_0 + t(A_{t'} u_0 - A_t u_0) = (t - t') A_{t'} u_0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} J_{t'} u_0 - J_t u_0 + t(A_{t'} u_0 - A_t u_0) &= \\ &= \frac{1}{t'} \left[ t' J_{t'} u_0 - t' J_t u_0 + t t' \left( \frac{u_0 - J_{t'} u_0}{t'} - \frac{u_0 - J_t u_0}{t} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{t'} [(t - t') u_0 - (t - t') J_{t'} u_0] = (t - t') A_{t'} u_0 . \end{aligned}$$

Soit  $h$  un réel positif ; comme  $A$  est accréatif et que  $(J_t u_0, A_t u_0) \in G(A)$ ,  $(J_{t+h} u_0, A_{t+h} u_0) \in G(A)$  on peut écrire :

$$\tau(J_{t+h} u_0 - J_t u_0, A_{t+h} u_0 - A_t u_0) \geq 0 .$$

De (3) et des propriétés du produit semi-intérieur on déduit :

$$\begin{aligned} &\tau(J_{t+h} u_0 - J_t u_0, -h A_{t+h} u_0 - (J_{t+h} u_0 - J_t u_0)) \geq 0 \\ \Leftrightarrow &\|J_{t+h} u_0 - J_t u_0\| \leq \tau(J_{t+h} u_0 - J_t u_0, -h A_{t+h} u_0) \\ \Leftrightarrow &\left\| \frac{J_{t+h} u_0 - J_t u_0}{h} \right\| \leq \tau\left( \frac{J_{t+h} u_0 - J_t u_0}{h}, -A_{t+h} u_0 \right) \quad (4) \end{aligned}$$

Comme l'application  $t \mapsto J_t u_0$  est p.p. dérivable sur  $]0, +\infty[$  , il en est de même pour  $t \mapsto A_t u_0$  et ainsi  $\lim_{h \rightarrow 0} A_{t+h} u_0 = A_t u_0$  p.p.  $t \in ]0, 1[$  .

On déduit alors de (4) et de la semi-continuité supérieure de  $\tau$  :

$$\left\| \frac{d}{dt} J_t u_0 \right\| \leq \tau\left( \frac{d}{dt} J_t u_0, -A_t u_0 \right) \leq \|A_t u_0\| \text{ p.p. } t \in ]0, 1[ \quad (5)$$



c) On suppose la norme dérivable au sens de Gateaux ; on montre alors :

$$\forall (x, y) \in X^2 \quad \tau(x, -y) = -\tau(x, y) \quad (6)$$

Pour cela on pose  $\forall (x, y) \in X^2, \forall t \in \mathbb{R}^* \quad \Delta(x, y, t) = \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}$ .

Il est alors immédiat que :  $\Delta(x, -y, t) = -\Delta(x, y, -t)$ . Puisque la norme est dérivable au sens de Gateaux,  $\tau$  représente la dérivée de la norme donc on a :

$$\tau(x, -y) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \Delta(x, -y, t) = - \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} \Delta(x, y, -t) = -\tau(x, y);$$

grâce à l'accrétivité de  $A$  on peut écrire :

$$\forall (J_t u_0, y) \in G(A) \text{ et } (J_{t+h} u_0, A_{t+h} u_0) \in G(A),$$

$$\tau(J_{t+h} u_0 - J_t u_0, A_{t+h} u_0 - y) \geq 0.$$

Comme  $\tau$  est s.c.s on obtient :

$$\tau\left(\frac{d}{dt} J_t u_0, A_t u_0 - y\right) \geq 0 \quad \text{p.p. } t \in ]0, 1[$$

qui devient grâce aux propriétés de  $\tau$  et de l'égalité (6) :

$$\tau\left(\frac{d}{dt} J_t u_0, -A_t u_0\right) \leq \tau\left(\frac{d}{dt} J_t u_0, -y\right) \leq \|y\| \quad \text{p.p. } t \in ]0, 1[;$$

d'où :

$$\tau\left(\frac{d}{dt} J_t u_0, -A_t u_0\right) \leq \inf \left\{ \|y\| / y \in A J_t u_0 \right\} = |A J_t u_0| \quad \text{p.p. } t \in ]0, 1[ \quad (7)$$

En comparant les inégalités (5) et (7) on obtient :

$$\left\| \frac{d}{dt} J_t u_0 \right\| \leq |A J_t u_0| \quad \text{p.p. } t \in ]0, 1[.$$

Comme  $A_t u_0 \in A J_t u_0$  il est immédiat que  $|A J_t u_0| \leq \|A_t u_0\|$ .

### Proposition 1.6.

Soit  $X$  un espace de Banach réflexif ou à dual séparable dont la norme est dérivable au sens de Gateaux,  $A$  un opérateur m-ac-crétif de  $X$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

.../...



$$\forall u_0 \in \overline{D(A)} ,$$

$$1) \quad u_0 \in D_{\alpha, p}$$

$$2) \quad t^{1-\alpha} |A J_t u_0| \in L_*^p(0, 1)$$

$$3) \quad t^{1-\alpha} \left\| \frac{d}{dt} J_t u_0 \right\| \in L_*^p(0, 1) .$$

Démonstration .

$$u_0 \in D_{\alpha, p} \Leftrightarrow u_0 \in \overline{D(A)} \text{ et } t^{1-\alpha} \|A_t u_0\| \in L_*^p(0, 1) .$$

D'après le lemme 1.5 ,  $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3)$  . Pour montrer que  $3) \Rightarrow 1)$  on utilise le lemme de Hardy suivant :

Lemme 1.7 (cf. [ 4 ] ) .

Soit  $\psi(s)$  une fonction positive sur  $]0, 1[$  , mesurable pour la mesure  $\frac{ds}{s}$  ; pour  $\gamma > 0$  ,  $1 \leq r \leq +\infty$  on a :

$$4) \quad \left\| t^{-\gamma} \int_0^t \psi(s) \frac{ds}{s} \right\|_{L_*^r(0, 1)} \leq \frac{1}{\gamma} \|s^{-\gamma} \psi(s)\|_{L_*^r(0, 1)}$$

$$5) \quad \left\| t^{\gamma} \int_t^1 \psi(s) \frac{ds}{s} \right\|_{L_*^r(0, 1)} \leq \frac{1}{\gamma} \|s^{\gamma} \psi(s)\|_{L_*^r(0, 1)} .$$

Pour montrer que  $3) \Rightarrow 1)$  on applique l'inégalité (4) du lemme 1.7 avec  $\gamma = \alpha$  ,  $r = p$  et  $\psi(s) = s \left\| \frac{d}{dt} J_s u_0 \right\|$  . Il vient :

$$t^{-\alpha} \int_0^t \left\| \frac{d}{dt} J_s u_0 \right\| ds \in L_*^p(0, 1) \quad (1)$$

Comme  $X$  est réflexif ou à dual séparable et que la fonction  $t \mapsto J_t u_0$  est localement lipschitzienne , elle est absolument continue sur tout fermé de  $]0, 1[$  , et on a d'après la proposition 12 :

$$\forall a \in ]0, 1[ \quad \forall t \in ]a, 1[ , \quad J_t u_0 = J_a u_0 + \int_a^t \frac{d}{dt} J_s u_0 ds \quad (2)$$

D'après la propriété 5 de la proposition 7 et comme  $A$  est  $m$ -accrétif,  $\forall u_0 \in \overline{D(A)}$  ,  $\lim_{a \rightarrow 0} J_a u_0 = u_0$  . On obtient par passage à la limite dans l'égalité (2) :



$$\forall u_0 \in \overline{D(A)} \quad u_0 - J_t u_0 = - \int_0^t \frac{d}{ds} J_s u_0 \, ds$$

soit :

$$\forall u_0 \in \overline{D(A)} \quad t^{-\alpha} \|u_0 - J_t u_0\| \leq t^{-\alpha} \int_0^t \left\| \frac{d}{ds} J_s u_0 \right\| \, ds \quad (3)$$

En comparant (1) et (3) il vient :

$$t^{-\alpha} \|u_0 - J_t u_0\| \leq L_*^p(0, 1)$$

ce qui achève la démonstration .

### Corollaire 1.8 .

Soit  $X$  un espace de Banach ,  $A$  un opérateur  $m$ -accrétif  
de  $X$  .  $\forall u_0 \in \overline{D(A)}$  ,

$$1) \quad u_0 \in D_{\alpha, p} \Rightarrow 2) \quad t^{1-\alpha} |A J_t u_0| \in L_*^p(0, 1) \quad .$$

Si de plus ,  $X$  est réflexif ou à dual séparable , on a :

$$1) \quad u_0 \in D_{\alpha, p} \Rightarrow 3) \quad t^{1-\alpha} \left\| \frac{d}{dt} J_t u_0 \right\| \in L_*^p(0, 1) \quad .$$

### Démonstration .

a) Comme  $A$  est  $m$ -accrétif dans un espace de Banach on a :

$$\forall u_0 \in X \quad |A J_t u_0| \leq \|A_t u_0\| \quad (\text{prop. 7.(4)})$$

Si  $u_0 \in D_{\alpha, p}$  on a  $t^{1-\alpha} \|A_t u_0\| \in L_*^p(0, 1)$  et donc :

$$t^{1-\alpha} |A J_t u_0| \in L_*^p(0, 1) \quad .$$

b) Si  $X$  est réflexif ou à dual séparable , on a montré dans le

lemme 1.5 :  $\left\| \frac{d}{dt} J_t u_0 \right\| \leq \|A_t u_0\|$  p.p.  $t \in ]0, 1[$  , soit 1) implique

3) , d'autre part la réciproque a été démontrée dans la proposition 1.6 sous les hypothèses de Banach réflexif ou à dual séparable .

### Proposition 1.9 .

Soit  $X$  un espace de Banach réel ,  $A$  un opérateur  $m$ -accrétif  
de  $X$  . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

.../...



$$\left\| \begin{array}{l} \forall u_0 \in \overline{D(A)} , \\ 1) \quad u_0 \in D_{\alpha, p} \\ 6) \quad t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \|u_0 - J_t u_0\| \in L_*^p(0, 1) . \end{array} \right.$$

### Démonstration .

On montre au préalable le lemme suivant .

### Lemme 1.10 .

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Pour tout } u_0 \in X \text{ l'application :} \\ t \in ]0, +\infty[ \mapsto \|u_0 - J_t u_0\| \\ \text{est p.p. dérivable et on a :} \\ \left| \frac{d}{dt} \|u_0 - J_t u_0\| \right| \leq \|A_t u_0\| . \end{array} \right.$$

### Démonstration .

On a montré dans le lemme 1.5 que l'application  $t \in ]0, +\infty[ \mapsto J_t u_0$  était localement lipschitzienne. Plus précisément on a :  $\forall t_0 \in ]0, +\infty[ , \forall t \in [t_0, +\infty[ , \forall h > 0 ,$

$$\left| \|u_0 - J_{t+h} u_0\| - \|u_0 - J_t u_0\| \right| \leq \|J_{t+h} u_0 - J_t u_0\| \leq h \cdot \|A_t u_0\|$$

ce qui prouve que l'application  $t \mapsto \|u_0 - J_t u_0\|$  est localement lipschitzienne ; donc , puisqu'elle est à valeurs dans  $\mathbf{R}^+$  , elle est p.p. dérivable . D'autre part :

$$\left| \frac{\|u_0 - J_{t+h} u_0\| - \|u_0 - J_t u_0\|}{h} \right| \leq \|A_t u_0\| \quad \forall t > 0$$

soit par passage à la limite sur  $h$  on obtient l'inégalité :

$$\left| \frac{d}{dt} \|u_0 - J_t u_0\| \right| \leq \|A_t u_0\| . \quad \star$$

Du lemme 1.10 on déduit que 1) entraîne 6), pour montrer la réciproque on utilise l'inégalité (4) du lemme 1.7 avec  $\gamma = \alpha$  ,  $r = p$  et



$\psi(s) = s \left\| \frac{d}{dt} \| u_0 - J_s u_0 \| \right\|$  . On obtient alors :

$$t^{-\alpha} \int_0^t \left\| \frac{d}{ds} \| u_0 - J_s u_0 \| \right\| ds \in L_*^p(0, 1) \quad (1)$$

La fonction  $t \in ]0, 1] \mapsto \| u_0 - J_t u_0 \|$  est absolument continue sur tout fermé de  $]0, 1]$  et à valeur dans  $\mathbb{R}^+$  . On a d'après la proposition 12 :

$$\forall a \in ]0, 1] \quad \forall t \in ]a, 1] ,$$

$$\| u_0 - J_t u_0 \| = \| u_0 - J_a u_0 \| + \int_a^t \frac{d}{ds} \| u_0 - J_s u_0 \| ds .$$

Comme  $\forall u_0 \in \overline{D(A)} \quad \lim_{a \rightarrow 0} J_a u_0 = u_0$  il est immédiat que :

$$t^{-\alpha} \| u_0 - J_t u_0 \| \leq t^{-\alpha} \int_0^t \left\| \frac{d}{ds} \| u_0 - J_s u_0 \| \right\| ds \quad (2)$$

Des relations (1) et (2) on en déduit que 6) entraîne 1) .

Partie B : Méthode des traces et des sommes . Méthode K et théorème d'interpolation .

Les résultats précédents vont permettre de caractériser les ensembles intermédiaires  $D_{\alpha, p}$  selon des méthodes utilisées en interpolation linéaire et non linéaire dans les Hilbert .

Proposition 1.11 : Méthode des traces .

Soit  $X$  un espace de Banach réflexif ou à dual séparable ,  $A$  un opérateur  $m$ -accrétif de  $X$  .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\forall u_0 \in \overline{D(A)} ,$$

$$1) \quad u_0 \in D_{\alpha, p}$$

$$7) \quad \exists w(t) \text{ absolument continue de } ]0, 1[ \rightarrow X , \text{ continue sur } [0, 1]$$

avec  $w(0) = u_0$  et telle que  $w(t) \in D(A)$  p.p. sur  $]0, 1[$  :

$$t^{1-\alpha} \| A w(t) \| \in L_*^p(0, 1)$$

$$\text{et} \quad t^{1-\alpha} \left\| \frac{d}{dt} w(t) \right\| \in L_*^p(0, 1) .$$



Démonstration .

i)  $\forall u_0 \in D_{\alpha, p}$  on obtient la propriété (7) grâce au corollaire 1.8 en prenant  $w(t) = J_t u_0$  .

ii) On envisage l'inégalité (4) du lemme 1.7 avec  $\gamma = \alpha$  ,  $r = p$  et  $\psi(s) = s \left\| \frac{d}{ds} w(s) \right\|$  . Alors l'hypothèse  $s^{1-\alpha} \left\| \frac{d}{ds} w(s) \right\| \in L_*^p(0, 1)$  entraîne  $t^{-\alpha} \int_0^t \left\| \frac{d}{ds} w(s) \right\| ds \in L_*^p(0, 1)$  .

On sait comme  $A$  est  $m$ -accrétif et d'après la proposition 7. (2) que :

$$\forall (u_0, v) \in X^2 \quad \|A_t u_0 - A_t v\| \leq \frac{2}{t} \|u_0 - v\| \quad \forall t > 0$$

$$\|A_t u_0\| - \|A_t v\| \leq |\|A_t u_0\| - \|A_t v\|| \leq \|A_t u_0 - A_t v\| \leq \frac{2}{t} \|u_0 - v\| .$$

$$\text{Or } \forall v \in D(A) \quad \|A_t v\| \leq |Av| .$$

On obtient donc :

$$\forall u_0 \in X, \forall v \in D(A) \quad \|A_t u_0\| \leq |Av| + \frac{2}{t} \|u_0 - v\| .$$

Or  $w(t) \in D(A)$  p.p.  $t \in ]0, 1[$  ; on peut donc poser  $v = w(t)$  et on obtient :

$$\forall u_0 \in X \quad \|A_t u_0\| \leq |Aw(t)| + \frac{2}{t} \|u_0 - w(t)\| \quad \text{p.p. } t$$

d'où :

$$t^{1-\alpha} \|A_t u_0\| \leq t^{1-\alpha} |Aw(t)| + 2t^{-\alpha} \|u_0 - w(t)\| \quad \text{p.p. } t .$$

Comme  $w$  est absolument continue dans un espace de Banach réflexif ou à dual séparable , on a d'après la proposition 12 :

$$w(t) = w(0) + \int_0^t \frac{d}{ds} w(s) ds \quad \text{p.p. } t$$

$$\|w(0) - w(t)\| \leq \int_0^t \left\| \frac{d}{ds} w(s) \right\| ds .$$

$$\text{Or } w(0) = u_0 .$$

$$t^{1-\alpha} \|A_t u_0\| \leq t^{1-\alpha} |Aw(t)| + 2t^{-\alpha} \int_0^t \left\| \frac{d}{ds} w(s) \right\| ds \quad \text{p.p. } t .$$

$$\text{Or } t^{1-\alpha} |Aw(t)| \in L_*^p(0, 1) \quad \text{et} \quad t^{-\alpha} \int_0^t \left\| \frac{d}{ds} w(s) \right\| ds \in L_*^p(0, 1) .$$



Il est alors immédiat que  $t^{1-\alpha} \|A_t u_0\| \in L_*^p(0, 1)$  ; soit  $u_0 \in D_{\alpha, p}$  . \*

### Remarque .

On généralisera ce résultat dans un espace de Banach quelconque en utilisant la dérivée de la variation bornée de la fonction  $w$ .

### Proposition 1.12 : Méthode des sommes .

Soit  $X$  un espace de Banach réel ,  $A$  un opérateur  $m$ -accré-  
tif de  $X$  . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\forall u_0 \in \overline{D(A)} ,$$

$$1) \quad u_0 \in D_{\alpha, p}$$

$$8) \quad \exists v_1(t) , v_2(t) \text{ fonctions mesurables de } [0, 1] \text{ dans } X$$

$$u_0 = v_1(t) + v_2(t) \text{ p.p. } t \in ]0, 1[ \text{ telles que } v_1(t) \in D(A) \text{ p.p. sur } ]0, 1[ :$$

$$t^{1-\alpha} |Av_1(t)| \in L_*^p(0, 1)$$

$$t^{-\alpha} \|v_2(t)\| \in L_*^p(0, 1) .$$

### Démonstration .

i)  $\forall u_0 \in D_{\alpha, p}$  on obtient la propriété (8) grâce au corollaire 1.8 en prenant  $v_1(t) = J_t u_0$  .

ii) On se place dans les hypothèses (8) . On a montré l'inégalité suivante :

$$\forall v \in D(A) \quad \forall t > 0 \quad \|A_t u_0\| \leq |Av| + \frac{2}{t} \|u_0 - v\| .$$

Comme  $v_1(t) \in D(A)$  p.p. sur  $]0, 1[$  on peut poser  $v_1(t) = v$  .

On obtient :

$$t^{1-\alpha} \|A_t u_0\| \leq t^{1-\alpha} |Av_1(t)| + 2 t^{-\alpha} \|u_0 - v_1(t)\| \quad \text{p.p. } t$$

$$t^{1-\alpha} \|A_t u_0\| \leq t^{1-\alpha} |Av_1(t)| + 2 t^{-\alpha} \|v_2(t)\| \quad \text{p.p. } t .$$

Comme  $t^{1-\alpha} |Av_1(t)| \in L_*^p(0, 1)$  et  $t^{-\alpha} \|v_2(t)\| \in L_*^p(0, 1)$  on en déduit que  $t^{1-\alpha} \|A_t u_0\| \in L_*^p(0, 1)$  et donc  $u_0 \in D_{\alpha, p}$  .



Proposition 1.13 : Méthode K (cf. D. Brézis Théorème 6 [4]).

Soit  $X$  un espace de Banach réel,  $A$  un opérateur m-accré-tif de  $X$ . On pose :

$$\forall u_0 \in \overline{D(A)} \quad K(t, u_0) = \inf_{v \in D(A)} \left( t |Av| + 2 \|u_0 - v\| \right).$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :  $\forall u_0 \in \overline{D(A)}$ ,

- 1)  $u_0 \in D_{\alpha, p}$
- 9)  $t^{-\alpha} K(t, u_0) \in L_*^p(0, 1)$ .

Démonstration.

$$K(t, u_0) \leq 2 \|u_0 - J_t u_0\| + t |A J_t u_0| \leq 3 \|u_0 - J_t u_0\|.$$

On a l'inégalité suivante :

$$\forall v \in D(A) \quad \|A_t u_0\| \leq |Av| + \frac{2}{t} \|u_0 - v\|$$

$$\forall v \in D(A) \quad \|u_0 - J_t u_0\| \leq t |Av| + 2 \|u_0 - v\|$$

soit :

$$\|u_0 - J_t u_0\| \leq K(t, u_0).$$

On obtient donc :

$$\|u_0 - J_t u_0\| \leq K(t, u_0) \leq 3 \|u_0 - J_t u_0\|$$

ce qui permet d'établir l'équivalence entre les propriétés (1) et (9).

Théorème d'interpolation 1.14 :

Etant donné deux espaces de Banach réels  $X_1$  et  $X_2$  de normes respectives  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$ , on considère  $A_1$  et  $A_2$  deux opérateurs m-accréatifs respectivement sur  $X_1$  et  $X_2$ .

Soit  $T$  une application localement lipschitzienne de  $\overline{D(A_1)}$  dans  $\overline{D(A_2)}$  appliquant  $D(A_1)$  dans  $D(A_2)$  et telle que :

$$\forall x \in D(A_1) \quad |A_2 T x|_2 \leq C |A_1 x|_1 + \omega(\|x\|_1) \quad (1)$$

où  $\omega$  désigne une fonction continue de  $\mathbf{R}^+$  dans  $\mathbf{R}^+$ .

Alors  $T$  applique  $D_{\alpha, p}(A_1)$  dans  $D_{\alpha, p}(A_2)$ . On appellera par la suite les ensembles  $D_{\alpha, p}$  ensembles d'interpolation entre  $D(A_1)$  et  $D(A_2)$ .



Remarque .

Ce résultat étend au cas des espaces de Banach la propriété démontrée par D. Brézis pour les espaces hilbertiens , et généralise le théorème d'interpolation classique .

Démonstration .

On veut montrer que  $\forall u_0 \in D_{\alpha,p}(A_1)$  alors  $Tu_0 \in D_{\alpha,p}(A_2)$  .  
Comme  $T$  est une application de  $\overline{D(A_1)}$  dans  $\overline{D(A_2)}$  il suffit de vérifier que si  $u_0 \in D_{\alpha,p}(A_1)$  il existe, d'après la proposition 1.12 , deux fonctions mesurables  $v_1(t)$  ,  $v_2(t)$  de  $[0, 1]$  dans  $X$  ,  $Tu_0 = v_1(t) + v_2(t)$  p.p.  $t \in ]0, 1[$  , telle que  $v_1(t) \in D_{\alpha,p}(A_2)$  p.p. sur  $]0, 1[$  et vérifiant :

$$t^{1-\alpha} |A_2 v_1(t)|_2 \in L_*^p(0, 1) \quad \text{et} \quad t^{-\alpha} \|v_2(t)\|_2 \in L_*^p(0, 1) .$$

On pose  $v_1(t) = T J_t^{A_1} u_0$  et on va montrer que :

$$t^{1-\alpha} |A_2 v_1(t)|_2 \in L_*^p(0, 1) \quad \text{et} \quad t^{-\alpha} \|Tu_0 - v_1(t)\|_2 \in L_*^p(0, 1) .$$

De l'inégalité (1) et en posant  $x = J_t^{A_1} u_0$  on déduit :

$$t^{1-\alpha} |A_2 v_1(t)|_2 \leq C t^{1-\alpha} |A_1 J_t^{A_1} u_0|_1 + t^{1-\alpha} w\left(\|J_t^{A_1} u_0\|_1\right) \leq K .$$

Comme  $u_0$  appartient à  $D_{\alpha,p}(A_1)$  d'après le corollaire 1.8 on a :

$$t^{1-\alpha} |A_1 J_t^{A_1} u_0|_1 \in L_*^p(0, 1) , \quad \text{d'autre part l'application}$$

$t \in ]0, 1] \mapsto J_t^{A_1} u_0$  est p.p. continue sur  $]0, 1[$  , il en est de même pour

l'application  $t \in ]0, 1[ \mapsto w\left(\|J_t^{A_1} u_0\|_1\right)$  donc :

$$\exists K > 0 \quad \text{p.p. } t \in ]0, 1[ \quad w\left(\|J_t^{A_1} u_0\|_1\right) \leq K .$$

On montre alors facilement que  $t^{1-\alpha} w\left(\|J_t^{A_1} u_0\|_1\right) \in L_*^p(0, 1)$  donc  $u_0$  appartient à  $D_{\alpha,p}(A_1)$  entraîne que  $t^{1-\alpha} |A_2 v_1(t)|_2 \in L_*^p(0, 1)$  .

$T$  est localement lipschitzienne et comme pour tout  $u_0$  de  $D(A)$  on a  $\lim_{t \rightarrow 0} J_t^{A_1} u_0$  ,

$$\exists L > 0 , \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t \in ]0, \delta[ ,$$

$$\|Tu_0 - T J_t^{A_1} u_0\|_2 \leq L \|u_0 - J_t^{A_1} u_0\|_1 .$$



On a supposé  $u_0 \in D_{\alpha, p}(A_1)$  donc  $t^{-\alpha} \|u_0 - J_t^{A_1} u_0\|_1 \in L_*^p(0, 1)$ .

On a donc :  $t^{-\alpha} \|Tu_0 - v_1(t)\|_2 \in L_*^p(0, \delta)$  ;

d'autre part  $t \in ]\delta, 1[ \Rightarrow \|Tu_0 - v_1(t)\|_2$  est p.p. continue donc il est immédiat que  $t^{-\alpha} \|Tu_0 - v_1(t)\|_2 \in L_*^p(0, 1)$ .

On a montré que si  $u_0 \in D_{\alpha, p}(A_1)$  alors  $Tu_0 \in D_{\alpha, p}(A_2)$ .



## CHAPITRE II

### CARACTERISATION DES ENSEMBLES D'INTERPOLATION A L'AIDE DES SEMI-GROUPES

---

On va définir les ensembles d'interpolation à l'aide du semi-groupe non linéaire engendré par  $-A$  ; aussi allons-nous faire quelques rappels concernant les solutions de problèmes d'évolution d'ordre un.

Partie A : Rappel [11] .

Soit  $T > 1$  ,  $X$  un espace de Banach réel ,  $A$  un opérateur de  $X$  . On donne les différentes définitions de solutions du problème de Cauchy homogène  $P(A, u_0, 0)$  :

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \in X \\ 0 \in \frac{du}{dt}(t) + Au(t) \quad \text{p.p. } t \in ]0, T[ \end{cases}$$

Définition 2.1 : solution forte .

Une application  $u$  de  $[0, T[$  dans  $X$  est dite solution forte du problème  $P(A, u_0, 0)$  si elle est :

- i) continue sur  $[0, T[$
- ii) absolument continue sur tout compact de  $[0, T[$
- iii) p.p. dérivable sur  $]0, T[$  et dont la dérivée vérifie :

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ 0 \in \frac{du}{dt}(t) + Au(t) \quad \text{p.p. } t \in ]0, T[ \end{cases}$$



Définition 2.2 : solution  $\epsilon$ -approchée .

Soit  $A$  un opérateur de  $X$  ,  $u_0 \in X$  et  $\epsilon > 0$  .

On appelle solution  $\epsilon$ -approchée du problème  $P(A, u_0, 0)$  toute application en escalier  $u_\epsilon$  de  $[0, T[$  dans  $X$  telle qu'il existe une partition  $\{t_i ; 0 \leq i \leq N\}$  de  $[0, T[$  et une famille  $\{x_i ; 0 \leq i \leq N\}$  de  $X$  vérifiant les propriétés suivantes :

- i)  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N < T$  avec
 
$$\max_{1 \leq i \leq N} (t_i - t_{i-1}) \leq \epsilon \quad \text{et} \quad T - t_N \leq \epsilon$$
- ii)  $u_\epsilon(0) = x_0 = u_0$  et  $\forall i = 1, 2, \dots, N \quad \forall t \in ]t_{i-1}, t_i]$ 

$$u_\epsilon(t) = x_i \quad \text{avec} \quad x_i \in D(A)$$
- iii)  $\forall i = 1, \dots, N \quad \forall t \in ]t_{i-1}, t_i] \quad 0 \in \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + Ax_i$  .

Définition 2.3 : solution limite .

Soit  $A$  un opérateur de  $X$  ,  $u_0 \in X$  .

Une application  $u$  de  $[0, T[$  dans  $X$  est dite solution limite ou  $\ell$ -solution du problème  $P(A, u_0, 0)$  si elle est continue de  $[0, T[$  dans  $X$  et s'il existe :

- i) une suite  $\{\epsilon_n ; n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}^+$  convergeant vers 0
- ii) une suite  $\{u_{0,n} ; n \in \mathbf{N}\} \subset X$  convergeant dans  $X$  vers  $u_0$
- iii) une suite  $\{u_{\epsilon,n} ; n \in \mathbf{N}\}$  de solutions  $\epsilon_n$ -approchées du problème  $P(A, u_{0,n}, 0)$  convergeant vers  $u$  uniformément sur tout ensemble compact de  $]0, T[$  .

Définition 2.4 : solution intégrale [ 2 ] .

Soit  $A$  un opérateur accréatif de  $X$  ,  $u_0 \in X$  .

On appelle solution intégrale du problème  $P(A, u_0, 0)$  toute application continue de  $[0, T[$  dans  $X$  vérifiant :

$$\forall (x, y) \in G(A) \quad \frac{d}{dt} \|u(t) - x\| \leq \tau(u(t) - x, -y) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'([0, T[) \quad .$$



Proposition 2.5.

Soit  $X$  un espace de Banach réel,  $A$  un opérateur accréatif de  $X$  vérifiant la condition (K) :

$$\forall x \in \overline{D(A)} \quad \lim_{\lambda \downarrow 0} \inf d(x, D_\lambda) = 0 \quad \text{avec } D_\lambda = R(I + \lambda A) .$$

Alors  $\forall u_0 \in \overline{D(A)}$  il existe une unique  $\ell$ -solution au problème  $P(A, u_0, 0)$  .

Remarque .

Un opérateur  $m$ -accréatif vérifie bien évidemment la condition (K) puisque dans ce cas  $D_\lambda = X$  .

Définitions et propriétés 2.6 .

Soit  $A$  un opérateur accréatif sur  $X$  vérifiant la condition (K). D'après la proposition 2.5 il existe une unique  $\ell$ -solution au problème  $P(A, u_0, 0)$  pour tout  $u_0$  élément de  $\overline{D(A)}$  . Pour tout  $t \in [0, T[$ , on pose:

$$u(t) = S(t) u_0 .$$

On a alors immédiatement les propriétés suivantes :

- 1)  $\forall t \in [0, T[ \quad S(t) : \overline{D(A)} \rightarrow \overline{D(A)}$
- 2)  $\forall (t, s) \in [0, T[^2 \quad S(t+s) = S(t) \circ S(s)$
- 3)  $\forall x \in \overline{D(A)} \quad S(0)x = x$
- 4)  $\forall x \in \overline{D(A)} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \|x - S(t)x\| = 0$
- 5)  $\forall x \in \overline{D(A)} \quad \forall y \in \overline{D(A)} \quad \forall t \in [0, T[$   

$$\|S(t)x - S(t)y\| \leq \|x - y\| .$$

On a les propriétés d'un semi-groupe de classe  $(C_0)$  de contractions non linéaires sur  $\overline{D(A)}$  .  $\{ S(t) ; t \in [0, T[ \}$  sera dit semi-groupe engendré par l'opérateur  $-A$  .



Partie B : Caracterisation des ensembles d'interpolation à l'aide du  
semi-groupe engendré par l'opérateur  $-A$ .

Définition 2.7 .

Soit  $X$  un espace de Banach réel ,  $A$  un opérateur accréatif  
de  $X$  vérifiant la condition (K) ,  $\alpha \in ]0, 1[$  ,  $p \in [1, +\infty]$  .

On appelle ensemble intermédiaire d'ordre  $\alpha$  et on note :

$$B_{\alpha, p} = \{ u_0 \in \overline{D(A)} / t^{-\alpha} \| u_0 - S(t) u_0 \| \in L_*^p(0, 1) \} .$$

Remarques .

1) On définit dans ce cas les ensembles  $B_{\alpha, p}$  à l'aide du semi -  
groupe engendré par  $-A$  et non à l'aide de la résolvante de  $A$  comme au  
chapitre précédent .

2) Si  $u$  est  $\ell$ -solution sur  $[0, T[$  avec  $T > 1$  alors  $u|_{[0, 1[}$  est  
une  $\ell$ -solution sur  $[0, 1[$  . On considère donc les restrictions des  $\ell$ -so-  
lutions à  $[0, 1[$  .

Proposition 2.8 .

Les ensembles intermédiaires  $B_{\alpha, p}$  vérifient les inclu-  
sions :

$$D(A) \subset B_{\alpha, p} \subset \overline{D(A)} .$$

Démonstration .

On utilise le lemme suivant :

Lemme 2.9 [ 2 ] .

Soit  $u$  une  $\ell$ -solution au problème  $P(A, u_0, 0)$  .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i)  $u$  est lipschitzienne

ii)  $u_0 \in \widetilde{D(A)}$

où  $\widetilde{D(A)} = \left\{ x \in X / \exists (x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G(A) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \sup_{n \in \mathbb{N}} \|y_n\| < +\infty \right\}$ .



Soit  $u_0 \in D(A)$  ; d'après le lemme 2.9  $u$  est lipschitzienne .  
 D'où  $\exists k > 0 \quad \|u_0 - u(t)\| \leq kt \quad \text{p.p. } t \in [0, 1]$  ce qui permet de  
 conclure que  $u_0 \in B_{\alpha, p}$  .

### Théorème 2.10 .

|| Soit  $X$  un espace de Banach réel ,  $A$  un opérateur  $m$ -accré-  
 tif de  $X$  . On a l'égalité des ensembles  $D_{\alpha, p}$  et  $B_{\alpha, p}$  .

### Démonstration .

On démontre successivement les inclusions  $B_{\alpha, p} \subset D_{\alpha, p}$   
 et  $D_{\alpha, p} \subset B_{\alpha, p}$  .

a)  $B_{\alpha, p} \subset D_{\alpha, p}$  .

Pour cela on utilise un résultat de H. Brézis [6] .

### Lemme 2.11 .

Soit  $X$  un espace de Banach réel ,  $A$  un opérateur  $m$ -accré-  
 tif de  $X$  . Pour tout  $u_0$  élément de  $\overline{D(A)}$  et tout réel positif on a :

$$\|u_0 - J_t u_0\| \leq \frac{4}{t} \int_0^t \|u_0 - S(s) u_0\| ds \quad . \quad \star$$

Soit  $u_0 \in B_{\alpha, p}$  ; alors  $t^{-\alpha} \|u_0 - S(t) u_0\| \in L_*^p(0, 1)$  .  
 D'après l'inégalité (4) du lemme 1.7 en posant  $\alpha = \gamma$  ,  $r = p$  et  
 $\psi(s) = \|u_0 - S(s) u_0\|$  on a  $s^{-\alpha} \psi(s) \in L_*^p(0, 1)$  qui implique que :

$$t^{-\alpha} \int_0^t \psi(s) \frac{ds}{s} = t^{-\alpha} \int_0^t \frac{\|u_0 - S(s) u_0\|}{s} ds \in L_*^p(0, 1) \quad .$$

Or d'après le lemme 2.11 on a pour  $0 < t \leq 1$  :

$$t^{-\alpha} \|u_0 - J_t u_0\| \leq 4 t^{-1-\alpha} \int_0^t \|u_0 - S(s) u_0\| ds$$



$$t^{-\alpha} \|u_0 - J_t u_0\| \leq 4 t^{-\alpha} \int_0^t \frac{\|u_0 - S(s) u_0\|}{s} ds .$$

Comme  $t^{-\alpha} \int_0^t \frac{\|u_0 - S(s) u_0\|}{s} ds \in L_*^p(0, 1)$  on en déduit que :

$$t^{-\alpha} \|u_0 - J_t u_0\| \in L_*^p(0, 1) \text{ ce qui montre que } B_{\alpha, p} \subset D_{\alpha, p} .$$

$$b) \quad D_{\alpha, p} \subset B_{\alpha, p} .$$

Pour montrer cette inclusion , il faut établir le résultat suivant :

Lemme 2.12 .

Soit  $X$  un espace de Banach réel ,  $A$  un opérateur  $m$ -accré-  
tif de  $X$  . On a :

$$\forall t \in [0, 1] , \quad \forall u_0 \in \overline{D(A)} \quad \|u_0 - S(t) u_0\| \leq K(t, u_0)$$

avec 
$$K(t, u_0) = \inf_{v \in D(A)} (2 \|u_0 - v\| + t |Av|) .$$

Démonstration .

On a besoin de vérifier que :

$$\forall t \in [0, 1] , \quad \forall v \in D(A) \quad \|S(t)v - v\| \leq t |Av| .$$

Soit le problème  $P(A, v, 0)$  avec  $v \in D(A)$  ; alors il existe une unique  $\ell$ -solution qui est lipschitzienne ( prop. 2.5 et 2.9 ) .

On sait d'après un résultat de Ph. Bénéilan [ 2 ] qu'une  $\ell$ -solution est aussi solution intégrale donc vérifie :

$$\forall (x, y) \in G(A) \quad \frac{d}{dt} \|v(t) - x\| \leq \tau(v(t) - x, y) \text{ dans } \mathcal{D}'([0, T[) .$$

D'où :

$$x = v \in D(A) , \quad \forall y \in Av \quad \frac{d}{dt} \|v(t) - v\| \leq \|y\| \text{ dans } \mathcal{D}'([0, T[)$$

$$\forall v \in D(A) \quad \frac{d}{dt} \|v(t) - v\| \leq |Av| \text{ dans } \mathcal{D}'([0, T[)$$

soit le résultat d'intégration :



Lemme 2.13 [ 2 ] .

Soit  $\varphi \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$  ,  $\psi \in L^1(0, T; \mathbb{R})$  .

On a l'équivalence des propriétés :

$$a) \quad \varphi(t) \leq \varphi(s) + \int_s^t \psi(\sigma) d\sigma \quad \forall (s, t) \in [0, T]^2 \quad s \leq t$$

b)  $\varphi$  est à variation bornée et sa dérivée au sens des distributions est majorée par  $\psi$  .  $\star$

En posant  $\varphi(t) = \|v(t) - v\|$  lipschitzienne donc continue sur  $[0, T]$  et à variation bornée , sa dérivée au sens des distributions est majorée par  $|Av|$  d'où en utilisant le lemme 2.11 avec  $s = 0$  on a :

$$\|v(t) - v\| \leq t |Av| \quad \forall v \in D(A)$$

soit  $\forall t \in [0, 1]$  ,  $\forall v \in D(A)$   $\|S(t)v - v\| \leq t |Av|$

$\forall u_0 \in \overline{D(A)}$  ,  $\forall v \in D(A)$  ,

$$\|u_0 - S(t)u_0\| \leq \|u_0 - v\| + \|v - S(t)v\| + \|S(t)v - S(t)u_0\| .$$

Or on a :

$$\|v - S(t)v\| \leq t |Av| \quad \text{et} \quad \|S(t)v - S(t)u_0\| \leq \|u_0 - v\|$$

d'où :

$$\forall u_0 \in \overline{D(A)} , \quad \forall v \in D(A) \quad \|u_0 - S(t)u_0\| \leq 2 \|u_0 - v\| + t |Av|$$

$$\forall u_0 \in \overline{D(A)} \quad \|u_0 - S(t)u_0\| \leq K(t, u_0) .$$

On veut montrer que  $D_{\alpha, p} \subset B_{\alpha, p}$  . Soit  $u_0 \in D_{\alpha, p}$  . On a montré (prop. 1.13) que  $t^{-\alpha} K(t, u_0) \in L^p_*(0, 1)$  donc d'après le lemme 2.12

comme  $\forall u_0 \in \overline{D(A)}$  ,

$$t^{-\alpha} \|u_0 - S(t)u_0\| \leq t^{-\alpha} K(t, u_0)$$

on en déduit que  $u_0 \in B_{\alpha, p}$  ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque .

Du lemme 2.12 on déduit que :

$$\forall t \in [0, 1] , \quad \forall u_0 \in \overline{D(A)} ,$$

$$\|u_0 - S(t)u_0\| \leq K(t, u_0) \leq 3 \|u_0 - J_t u_0\| .$$



Or d'après la remarque de la proposition 1.4 il vient :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad 0 < t < \eta \quad \|u_0 - S(t)u_0\| \leq \varepsilon t^\alpha$$

ce qui met en évidence un effet régularisant pour la solution du problème d'évolution lorsque  $u_0$  est élément de l'ensemble d'interpolation  $D_{\alpha,p}$ .



### CHAPITRE III

#### GENERALISATION ET ENSEMBLE D'INTERPOLATION ASSOCIE A UNE SOMME D'OPERATEURS

---

On va , dans une première partie , étendre à un espace de Banach quelconque la méthode des traces puis , dans une seconde partie , trouver une relation entre  $D_{\alpha, p}(A)$  et  $D_{\alpha, p}(A+B)$  pour deux opérateurs  $A$  et  $B$   $m$ -accrétifs avec  $B$  dominé par  $A$  c'est-à-dire tel que  $D(A) \subset D(B)$  , il existe  $k \in ]0, 1[$  et une fonction continue  $C$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$  vérifiant :

$$\forall x \in D(A) \quad |Bx| \leq k |Ax| + C(\|x\|) .$$

#### Partie A : Généralisation de la méthode des traces .

Soit  $A$  un opérateur  $m$ -accrétif de  $X$  et  $J_t$  sa résolvante pour tout  $t_0$  réel positif . On a montré que l'application  $t \in [t_0, 1] \mapsto J_t u_0$  ,  $\forall u_0 \in X$  , est lipschitzienne donc absolument continue ; on peut alors définir sa variation bornée  $t \in [t_0, 1] \mapsto V_J(t)$  et on a [ 5 ] :

$$\|J_t u_0 - J_{t'} u_0\| \leq \int_{t'}^t -\frac{d}{ds} V_J(s) ds \quad \text{pour tout } t_0 \leq t' \leq t \leq 1 \\ \text{et } \forall u_0 \in X .$$

#### Proposition 3.1 .

Soit  $X$  un espace de Banach réel ,  $A$  un opérateur  $m$ -accrétif de  $X$  . Les propriétés suivantes sont équivalentes :  $\forall u_0 \in \overline{D(A)}$  ,

- 1)  $u_0 \in D_{\alpha, p}$
- 10)  $t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} V_J(t) \in L_*^p(0, 1)$  .



Démonstration .

i) Soient  $u_0$  appartenant à  $X$  et  $t_0$  un réel positif .

D'après le lemme 1.6 on sait que :

$$\forall t \in ]t_0, 1[ \text{ et } \forall h > 0 ,$$

$$\left\| \frac{J_{t+h} u_0 - J_t u_0}{h} \right\| \leq \|A_t u_0\| \quad (1)$$

Comme  $t \mapsto J_t u_0$  est absolument continue sur  $[t_0, 1]$

$(t \mapsto J_t u_0) \in \tilde{W}^{1,1}(t_0, 1; X)$  ; d'où d'après la proposition 11 on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{J_{t+h} u_0 - J_t u_0}{h} \right\| = - \frac{d}{dt} V_J(t) \quad \text{p.p. } t \in ]t_0, 1[ \quad (2)$$

Des relations (1) et (2) on déduit :

$$0 \leq - \frac{d}{dt} V_J(t) \leq \|A_t u_0\| \quad \text{p.p. } t \in ]t_0, 1[ .$$

Soit  $u_0$  appartenant à  $D_{\alpha, p}$  ; alors  $t^{1-\alpha} \|A_t u_0\| \in L_*^p(0, 1)$  .

D'où  $t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} V_J(t) \in L_*^p(0, 1)$

ce qui montre que 1) implique 10) .

ii) On a :

$$\|J_t u_0 - J_{t'} u_0\| \leq \int_{t'}^t - \frac{d}{ds} V_J(s) ds \quad t_0 \leq t' \leq t \leq 1$$

$$\overline{\lim_{t' \rightarrow 0}} \|J_t u_0 - J_{t'} u_0\| \leq \int_0^t - \frac{d}{ds} V_J(s) ds .$$

Or comme  $A$  est  $m$ -accrétif , d'après la proposition 7 (5) on a :

$$\forall u_0 \in \overline{D(A)} \quad \lim_{t' \rightarrow 0} J_{t'} u_0 = u_0 \quad \text{d'où :}$$

$$\forall u_0 \in \overline{D(A)} \quad \|u_0 - J_t u_0\| \leq \int_0^t - \frac{d}{ds} V_J(s) ds \quad (3)$$

On applique l'inégalité (4) du lemme 1.7 avec  $\gamma = \alpha$  ,  $r = p$  et  $\psi(s) = -s \frac{d}{ds} V_J(s)$  . L'hypothèse 10) implique que  $s^{-\alpha} \psi(s) \in L_*^p(0, 1)$

d'où  $t^{-\alpha} \int_0^t - \frac{d}{ds} V_J(s) ds \in L_*^p(0, 1)$  . On en déduit d'après (3) que



$t^{-\alpha} \|u_0 - J_t u_0\| \in L_*^p(0, 1)$  soit  $u_0 \in D_{\alpha, p}$  ce qui montre que 10) implique 1) .

Proposition 3.2 : Méthode des traces .

Soit  $X$  un espace de Banach réel ,  $A$  un opérateur  $m$ -accré-tif de  $X$  . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\forall u_0 \in \overline{D(A)} ,$$

$$1) \quad u_0 \in D_{\alpha, p}$$

11)  $\exists w(t)$  absolument continue de  $]0, 1[$  dans  $X$  continue sur  $[0, 1]$  avec  $w(0) = u_0$  et telle que  $w(t) \in D(A)$  p.p.  $t \in ]0, 1[$  :

$$t^{1-\alpha} |Aw(t)| \in L_*^p(0, 1)$$

$$t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} V_w(t) \in L_*^p(0, 1) .$$

Démonstration .

i)  $\forall u_0 \in D_{\alpha, p}$  on obtient la propriété 11) en posant  $w(t) = J_t u_0$  et en utilisant le corollaire 1.8 et la proposition 3.1 .

ii) On envisage l'inégalité (4) du lemme 1.7 avec  $\gamma = \alpha$  ,  $r = p$  et  $\psi(s) = -s \frac{d}{dt} V_w(s)$  . Alors l'hypothèse  $s^{1-\alpha} \frac{d}{dt} V_w(s) \in L_*^p(0, 1)$  entraîne

$$t^{-\alpha} \int_0^t -\frac{d}{dt} V_w(s) ds \in L_*^p(0, 1) .$$

On a montré dans la proposition 1.11 que comme  $w(t) \in D(A)$  p.p.  $t \in ]0, 1[$  :

$$t^{1-\alpha} \|A_t u_0\| \leq t^{1-\alpha} |Aw(t)| + 2t^{-\alpha} \|u_0 - w(t)\| \quad \text{p.p. } t \quad (1)$$

Comme  $w$  est absolument continue sur  $]0, 1[$  on a :

$$\|w(s) - w(t)\| \leq \int_s^t -\frac{d}{dt} V_w(\xi) d\xi \quad \text{pour } 0 < s \leq t \leq 1 .$$

Or  $w$  est continue sur  $[0, 1]$  et  $w(0) = u_0$  . On obtient donc par passage à la limite sur  $s$  :



$$\|u_0 - w(t)\| \leq \int_0^t -\frac{d}{dt} V_w(\xi) d\xi \quad (2)$$

On déduit alors de (1) et (2) :

$$t^{1-\alpha} \|A_t u_0\| \leq t^{1-\alpha} |Aw(t)| + 2t^{-\alpha} \int_0^t -\frac{d}{dt} V_w(s) ds \quad \text{p.p. } t \quad .$$

$$\text{Or } t^{1-\alpha} |Aw(t)| \in L_*^p(0,1) \quad \text{et } t^{-\alpha} \int_0^t -\frac{d}{dt} V_w(s) ds \in L_*^p(0,1) \quad ;$$

$$\text{donc } t^{1-\alpha} \|A_t u_0\| \in L_*^p(0,1) \quad \text{soit } u_0 \in D_{\alpha,p} \quad .$$

Partie B :      Classes d'interpolation associées à une somme d'opérateurs  
m-accrétifs .

Définition 3.3 .

Soient A et B deux opérateurs m-accrétifs de X .

On dit que B est dominé par A si  $D(A) \subset D(B)$  et s'il existe un réel  $k \in ]0,1[$  et une fonction continue  $C : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  tels que :

$$\forall x \in D(A) \quad |Bx| \leq k |Ax| + C(\|x\|) \quad .$$

Proposition 3.4 .

Soient X un espace de Banach réel , A et B deux opérateurs  
m-accrétifs de X tels que B soit dominé par A , et A+B soit un opéra -  
teur m-accrétif , pour  $\alpha \in ]0,1[$  et  $p \in [1, +\infty]$  .

On a :

$$D_{\alpha,p}(A) \subset D_{\alpha,p}(A+B) \quad .$$

Démonstration .

Soit  $u_0 \in D_{\alpha,p}(A)$  . D'après la proposition 3.2 , il existe une fonction  $w(t)$  absolument continue de  $]0,1[ \rightarrow X$  , continue sur  $[0,1]$  avec  $w(0) = u_0$  et telle que  $w(t) \in D(A)$  p.p.  $t \in ]0,1[$  :



$$t^{1-\alpha} |Aw(t)| \in L_*^p(0,1) \quad \text{et} \quad t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} V_w(t) \in L_*^p(0,1) .$$

On utilise le résultat suivant :

Lemme 3.5 .

Soient A et B deux opérateurs de X .

On a :

$$\forall x \in D(A) \cap D(B) \quad |(A+B)x| \leq |Ax| + |Bx| .$$

Démonstration .

$\forall x \in D(A) \cap D(B)$  ,  $\forall (x,y) \in G(A)$  et  $\forall (x,z) \in G(B)$  on a :

$$\|y+z\| \leq \|y\| + \|z\|$$

$$|(A+B)x| = \inf \left\{ \|y+z\| / (x,y) \in G(A) \text{ et } (x,z) \in G(B) \right\} \leq \|y\| + \|z\|$$

$$|(A+B)x| \leq \inf \left\{ \|y\| / (x,y) \in G(A) \right\} + \|z\| = |Ax| + \|z\|$$

$$|(A+B)x| \leq |Ax| + \inf \left\{ \|z\| / (x,z) \in G(B) \right\} = |Ax| + |Bx| . \quad \star$$

Comme B est dominé par A  $D(A) \cap D(B) = D(A)$  .

$$\forall v \in D(A) \quad |(A+B)v| \leq |Av| + |Bv| \leq (k+1) |Av| + C(\|v\|) .$$

Comme  $w(t) \in D(A)$  p.p.  $t \in ]0,1[$  on pose  $v = w(t)$  .

$$t^{1-\alpha} |(A+B)w(t)| \leq t^{1-\alpha} (k+1) |Aw(t)| + t^{1-\alpha} C(\|w(t)\|)$$

p.p.  $t \in ]0,1[$  .

Or  $u_0 \in D_{\alpha,p}$  donc  $t^{1-\alpha} |Aw(t)| \in L_*^p(0,1)$  .

C est continue ,  $t \mapsto w(t)$  est continu sur  $[0,1]$  donc  $t \mapsto C(\|w(t)\|)$  est continu sur  $[0,1]$  et comme  $\alpha \in ]0,1[$   $t^{1-\alpha} C(\|w(t)\|) \in L_*^p(0,1)$  d'où

$t^{1-\alpha} |(A+B)w(t)| \in L_*^p(0,1)$  et comme w vérifie  $t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} V_w(t) \in L_*^p(0,1)$

on déduit de la proposition 3.2 que  $w(0) = u_0 \in D_{\alpha,p}(A+B)$  soit que

$$D_{\alpha,p}(A) \subset D_{\alpha,p}(A+B) .$$



Théorème 3.6 .

Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs  $m$ -accrétifs de  $X$  avec  $B$  dominé par  $A$  ,  $X$  un espace de Banach dont le dual est uniformément convexe . Alors  $A+B$  est  $m$ -accrétif et pour  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $p \in [1, +\infty]$  on a :

$$D_{\alpha, p}(A) = D_{\alpha, p}(A+B) .$$

Démonstration .

$$i) \quad D_{\alpha, p}(A) \subset D_{\alpha, p}(A+B) .$$

En effet , d'après un résultat de Ph. Bénilan [ 2 ] , si  $X'$  est uniformément convexe et si  $A$  et  $B$  sont deux opérateurs  $m$ -accrétifs de  $X$  avec  $B$  dominé par  $A$  , alors  $A+B$  est  $m$ -accrétif . On peut alors appliquer la proposition 3.4 .

$$ii) \quad D_{\alpha, p}(A+B) \subset D_{\alpha, p}(A) .$$

Il faut établir quelques résultats préliminaires .

Lemme 3.7 .

Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs  $m$ -accrétifs de  $X$  avec  $B$  dominé par  $A$  . On pose pour tout  $u_0$  de  $X$  , tout  $t$  élément de  $]0, 1[$   $v_\mu(t) = J_t^{A+B_\mu} u_0$  , où  $B_\mu$  désigne la régularisée Yosida de  $B$  .

On montre :

- 1) i)  $\exists \beta_1 > 0 \quad \forall \mu > 0 \quad \|v_\mu(t)\| \leq \beta_1$
- ii)  $\exists \beta_2 > 0 \quad \forall \mu > 0 \quad \|B_\mu v_\mu(t)\| \leq \beta_2$
- iii)  $\exists \beta_3 > 0 \quad \forall \mu > 0 \quad |Av_\mu(t)| \leq \beta_3$

2) Si  $X'$  est uniformément convexe :

- i)  $v_\mu(t)$  converge au sens de la topologie forte sur  $X$  vers  $v(t) = J_t^{A+B} u_0$  .

$$ii) \quad |Av(t)| \leq \lim_{\mu \rightarrow 0} |Av_\mu(t)| .$$



Démonstration .

1. On sait que si  $A$  est un opérateur  $m$ -accrétif de  $X$  et  $C$  un opérateur accrétif lipschitzien alors  $A+C$  est  $m$ -accrétif [ 2 ] .

Comme  $B_\mu$  est accrétif lipschitzien on en déduit que  $A+B_\mu$  est  $m$ -accrétif .

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \forall u_0 \in X, \quad \forall t > 0, \quad v_\mu(t) = J_t^{A+B_\mu} u_0 \in D(A+B_\mu) = D(A) \\ v_\mu(t) = J_t^{A+B_\mu} u_0 & \Leftrightarrow u_0 \in v_\mu(t) + t A v_\mu(t) + t B_\mu v_\mu(t) \\ & \Leftrightarrow \left( v_\mu(t), \frac{u_0 - v_\mu(t)}{t} \right) \in G(A+B_\mu) . \end{aligned} \quad (1)$$

Soit  $x_0 \in D(A)$  ,  $(x_0, z_0) \in G(A)$  . Alors  $(x_0, z_0 + B_\mu x_0) \in G(A+B_\mu)$  .

Comme  $A+B_\mu$  est accrétif on peut écrire :  $\forall k' > 0$  ,

$$\|v_\mu(t) - x_0\| \leq \|v_\mu(t) - x_0 + k' \left[ \frac{u_0 - v_\mu(t)}{t} - z_0 - B_\mu x_0 \right]\| .$$

En posant  $k' = t > 0$  on a :

$$\begin{aligned} \|v_\mu(t) - x_0\| & \leq \|v_\mu(t) - x_0 + u_0 - v_\mu(t) - t z_0 - t B_\mu x_0\| \\ \|v_\mu(t) - x_0\| & \leq \|u_0 - x_0 - t z_0\| + t \|B_\mu x_0\| . \end{aligned}$$

Or  $x_0 \in D(A) \subset D(B)$  donc  $\|B_\mu x_0\| \leq \|B x_0\|$  . On obtient alors :

$$\|v_\mu(t)\| \leq \|u_0 - x_0 - t z_0\| + t \|B x_0\| + \|x_0\| = \beta_1 .$$

$$\text{ii)} \quad \text{Comme } v_\mu(t) \in D(A) \text{ on a } \|B_\mu v_\mu(t)\| \leq \|B v_\mu(t)\| .$$

D'où d'après l'inégalité de domination :

$$\|B_\mu v_\mu(t)\| \leq \|B v_\mu(t)\| \leq k \|A v_\mu(t)\| + C(\|v_\mu(t)\|) .$$

On pose  $K = \sup_{0 \leq r \leq \beta_1} C(r)$  ; comme  $C$  est continu ,  $K < +\infty$  et comme

$$\|v_\mu(t)\| \leq \beta_1 \text{ on en déduit que } C(\|v_\mu(t)\|) \leq K .$$

Comme  $B_\mu$  est une application et d'après (1) on sait que :

$$\frac{u_0 - v_\mu(t)}{t} - B_\mu v_\mu(t) \leq A v_\mu(t)$$

d'où :

$$\|A v_\mu(t)\| \leq \left\| \frac{u_0 - v_\mu(t)}{t} - B_\mu v_\mu(t) \right\| \leq \frac{1}{t} \|u_0 - v_\mu(t)\| + \|B_\mu v_\mu(t)\|$$



$$\|B_\mu v_\mu(t)\| \leq k \|Av_\mu(t)\| + K \leq k \left[ \frac{1}{t} \|u_0 - v_\mu(t)\| + \|B_\mu v_\mu(t)\| \right] + K$$

$$(1-k) \|B_\mu v_\mu(t)\| \leq \frac{k}{t} [\|u_0\| + \beta_1] + K.$$

Or  $1-k > 0$ .

$$\|B_\mu v_\mu(t)\| \leq \frac{k}{t(1-k)} [\|u_0\| + \beta_1] + \frac{K}{1-k} = \beta_2.$$

$$\text{iii) } \|Av_\mu(t)\| \leq \frac{1}{t} \|u_0\| + \frac{1}{t} \|v_\mu(t)\| + \|B_\mu v_\mu(t)\|$$

D'où :

$$\|Av_\mu(t)\| \leq \frac{1}{t} (\|u_0\| + \beta_1) + \beta_2 = \beta_3.$$

2. On utilise le résultat suivant :

Lemme 3.8 [1].

Soit  $X$  un espace de Banach réel. On désigne par  $F$  l'opérateur de  $X$  dans son dual défini par :

$$\forall x \in X \quad F(x) = \left\{ x' \in X' / \langle x, x' \rangle_{X, X'} = \|x\|_X^2 = \|x'\|_{X'}^2 \right\}.$$

Si  $X'$  est uniformément convexe alors  $F$  est univoque et uniformément continu sur les bornés de  $X$ . ★

i) On montre que  $v_\mu(t)$  converge au sens de la topologie forte sur  $X$  vers  $v(t) = \int_t^{A+B} u_0$ .

$\exists \eta_\mu(t) \in Av_\mu(t)$ ,  $\exists \eta(t) \in Av(t)$ ,  $\exists w(t) \in Bv(t)$  tels que :

$$\frac{u_0 - v(t)}{t} - \eta(t) - w(t) = 0 \text{ et d'après (1) } \frac{u_0 - v_\mu(t)}{t} - \eta_\mu(t) - B_\mu v_\mu(t) = 0.$$

D'où :

$$\frac{v(t) - v_\mu(t)}{t} + \eta(t) - \eta_\mu(t) + w(t) - B_\mu v_\mu(t) = 0 \quad (2)$$

On obtient alors :



$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{v(t) - v_\mu(t)}{t}, F(v(t) - v_\mu(t)) \right\rangle_{X, X'} + \langle \eta(t) - \eta_\mu(t), F(v(t) - v_\mu(t)) \rangle_{X, X'} + \\ & \quad + \langle w(t) - B_\mu v_\mu(t), F(v(t) - v_\mu(t)) \rangle_{X, X'} = 0 \\ & \langle v(t) - v_\mu(t), F(v(t) - v_\mu(t)) \rangle_{X, X'} = \|v(t) - v_\mu(t)\|_X^2. \end{aligned}$$

Or  $A$  est accréatif et d'après [2] il vient :

$$\langle \eta(t) - \eta_\mu(t), F(v(t) - v_\mu(t)) \rangle_{X, X'} = \|v(t) - v_\mu(t)\|_X \cdot \tau(v(t) - v_\mu(t), \eta(t) - \eta_\mu(t)) \geq 0.$$

On obtient alors :

$$\frac{1}{t} \|v(t) - v_\mu(t)\|^2 \leq \langle w(t) - B_\mu v_\mu(t), -F(v(t) - v_\mu(t)) \rangle_{X, X'} \quad (3)$$

$$(J_\mu^B v_\mu(t), B_\mu v_\mu(t)) \in G(B), (v(t), w(t)) \in G(B), B \text{ est accréatif ;}$$

on a :

$$\langle w(t) - B_\mu v_\mu(t), F(v(t) - J_\mu^B v_\mu(t)) \rangle_{X, X'} \geq 0 \quad (4)$$

Des inégalités (3) et (4) on déduit :

$$\frac{1}{t} \|v(t) - v_\mu(t)\|^2 \leq \langle w(t) - B_\mu v_\mu(t), F(v(t) - J_\mu^B v_\mu(t)) - F(v(t) - v_\mu(t)) \rangle_{X, X'}$$

$$\frac{1}{t} \|v(t) - v_\mu(t)\|^2 \leq (\|w(t)\|_X + \beta_2) \cdot \|F(v(t) - J_\mu^B v_\mu(t)) - F(v(t) - v_\mu(t))\|_{X'} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \| (v(t) - J_\mu^B v_\mu(t)) - (v(t) - v_\mu(t)) \|_X &= \| v_\mu(t) - J_\mu^B v_\mu(t) \|_X = \\ &= \mu \| B_\mu v_\mu(t) \|_X \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \| (v(t) - J_\mu^B v_\mu(t)) - (v(t) - v_\mu(t)) \|_X \leq \mu \beta_2.$$

Lorsque  $\mu \rightarrow 0$  alors  $\| (v(t) - J_\mu^B v_\mu(t)) - F(v(t) - v_\mu(t)) \|_X \rightarrow 0$  ; comme

$F$  est uniformément continu sur les bornés de  $X$  on en déduit que :

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \|F(v(t) - J_\mu^B v_\mu(t)) - F(v(t) - v_\mu(t))\|_{X'} = 0$$

ce qui donne grâce à l'inégalité (5) :

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \|v(t) - v_\mu(t)\|_X = 0.$$

ii) Comme  $X = \lim_{\mu \rightarrow 0} v_\mu(t) = v(t)$  et que  $|\cdot|$  est s.c.i., on dé-

duit alors facilement que  $|Av(t)| \leq \lim_{\mu \rightarrow 0} |Av_\mu(t)|$ .



On montre que  $D_{\alpha, p}(A+B) \subset D_{\alpha, p}(A)$ .

$\forall \mu > 0$   $B_\mu$  est une application ;  $\forall x \in D(A) \cap D(B)$   $\|B_\mu(x)\| \leq \|Bx\|$ .

On a :

$$\begin{aligned} |Ax| &= |(A+B_\mu)x - B_\mu x| \leq |(A+B_\mu)x| + \|B_\mu x\| \\ |Ax| &\leq |(A+B_\mu)x| + \|Bx\|. \end{aligned}$$

De l'inégalité de domination on déduit :

$$|Ax| \leq |(A+B_\mu)x| + k |Ax| + C(\|x\|).$$

Comme  $k \in ]0, 1[$  :

$$|Ax| \leq \frac{1}{1-k} \left[ |(A+B_\mu)x| + C(\|x\|) \right].$$

On pose  $x = v_\mu(t) \in D(A)$  ;

$$|Av_\mu(t)| \leq \frac{1}{1-k} \left[ |(A+B_\mu)v_\mu(t)| + C(\|v_\mu(t)\|) \right] \quad (6)$$

$$v_\mu(t) = J_t^{A+B_\mu} u_0 \approx \frac{u_0 - v_\mu(t)}{t} \in (A+B_\mu) v_\mu(t)$$

d'où :

$$|(A+B_\mu)v_\mu(t)| \leq \frac{1}{t} \|u_0 - v_\mu(t)\| \quad (7)$$

En comparant (6) et (7) on obtient :

$$|Av_\mu(t)| \leq \frac{1}{1-k} \left[ \frac{1}{t} \|u_0 - v_\mu(t)\| + C(\|v_\mu(t)\|) \right] \quad (8)$$

On a montré dans le lemme 3.7 que  $v(t) = X - \lim_{\mu \rightarrow 0} v_\mu(t)$  et

$|Av(t)| \leq \lim_{\mu \rightarrow 0} |Av_\mu(t)|$ . On obtient par passage à la limite inférieure

sur  $\mu$  dans (8) :

$$\begin{aligned} |Av(t)| &\leq \frac{1}{1-k} \left[ \frac{1}{t} \|u_0 - v(t)\| + C(\|v(t)\|) \right] \\ t^{1-\alpha} |Av(t)| &\leq \frac{1}{1-k} \left[ t^{-\alpha} \|u_0 - v(t)\| + t^{1-\alpha} C(\|v(t)\|) \right]. \end{aligned}$$

Soit  $u_0 \in D_{\alpha, p}(A+B)$  ; alors comme  $v(t) = J_t^{A+B} u_0$  il est immédiat que  $t^{-\alpha} \|u_0 - v(t)\| \in L_*^p(0, 1)$ . D'autre part  $C$  et  $v$  sont continues sur  $[0, 1]$  donc :

$$t^{1-\alpha} C(\|v(t)\|) \in L_*^p(0, 1) \quad \text{et} \quad t^{1-\alpha} |Av(t)| \in L_*^p(0, 1).$$



D'après la proposition 3.1 comme  $u_0 \in D_{\alpha, p}(A+B)$  on en déduit que :

$$t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} V_{J(A+B)}(t) \in L_*^p(0, 1) \quad \text{d'où} \quad t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} V_V(t) \in L_*^p(0, 1) .$$

De plus ,  $v(t)$  est absolument continue sur  $]0, 1[$  , continue sur  $[0, 1]$  ,

telle que  $v(0) = u_0$  ,

$$v(t) \in D(A+B) = D(A) \text{ p.p. } t \in ]0, 1[ ,$$

et vérifie de plus :

$$t^{1-\alpha} |Av(t)| \in L_*^p(0, 1) \quad \text{et} \quad t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} V_V(t) \in L_*^p(0, 1) .$$

Donc il est immédiat d'après la proposition 3.2 que  $u_0$  est élément de

$$D_{\alpha, p}(A) .$$



## CHAPITRE IV

### CARACTERISATION DES ENSEMBLES D'INTERPOLATION DANS LE CAS D'UN SEMI-GROUPE REGULARISANT

---

#### Définition 4.1 .

Soit  $A$  un opérateur  $m$ -accrétif dans un espace de Banach  $X$ .  
On dit que  $S(t)$  semi-groupe engendré par  $-A$  est régularisant si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- i)  $\forall t > 0 \quad S(t)$  applique  $\overline{D(A)}$  dans  $D(A)$
- ii)  $S(t)$  vérifie l'une des deux conditions équivalentes :

$$12) \exists C_1 > 0, \forall u_0 \in \overline{D(A)}, \forall v \in D(A), \forall t > 0$$

$$|AS(t)u_0| \leq C_1 \left[ |Av| + \frac{2}{t} \|u_0 - v\| \right]$$

$$13) \exists C_2 > 0, \forall u_0 \in \overline{D(A)}, \forall t > 0$$

$$|AS(t)u_0| \leq C_2 \|A_t u_0\| .$$

#### Remarques .

- 1) On montre l'équivalence entre 12) et 13) .

i) Soit 12) vérifiée ; on pose  $v = J_t u_0 \in D(A)$  . On obtient :

$$|AS(t)u_0| \leq C_1 \left[ |AJ_t u_0| + \frac{2}{t} \|u_0 - J_t u_0\| \right] \leq 3C_1 \|A_t u_0\|$$

donc avec  $C_3 = 3C_1$  on a montré que 12)  $\Rightarrow$  13) .

ii) Réciproquement on a :

$$\forall t > 0, \forall v \in D(A) \quad \|A_t u_0\| \leq \|A_t v\| + \|A_t v - A_t u_0\|$$

$$\|A_t u_0\| \leq |Av| + \frac{2}{t} \|u_0 - v\|$$

$$\text{donc} \quad |AS(t)u_0| \leq C_2 \|A_t u_0\| \leq C_2 \left[ |Av| + \frac{2}{t} \|u_0 - v\| \right]$$



ce qui montre que  $13) \Rightarrow 12)$  .

2) Dans le cas de semi-groupe régularisant , on peut obtenir des caractérisations supplémentaires des ensembles d'interpolation  $D_{\alpha, p}$  faisant intervenir notamment  $\frac{d^+}{dt} S(t)u_0$  .

Proposition 4.2 [ 1 ] .

Soit  $X$  un espace de Banach uniformément convexe ainsi que son dual ,  $A$  un opérateur  $m$  - accréatif de  $X$ . Pour tout élément  $v$  de  $D(A)$

1)  $Av$  a un unique élément de norme minimale noté  $A^\circ v$

2) Il existe une unique fonction  $u(t) \in D(A)$  pour tout  $t \geq 0$  qui est continue , lipschitzienne sur  $[0, +\infty[$  et partout dérivable à droite avec :

$$\forall t \in [0, +\infty[ \quad \frac{d^+}{dt} u(t) + A^\circ u(t) = 0$$

$$u(0) = v$$

Proposition 4.3 .

Soit  $X$  un espace de Banach uniformément convexe ainsi que son dual ,  $A$  un opérateur  $m$  - accréatif tel que le semi-groupe associé à l'opérateur  $-A$  soit régularisant . Pour tout  $u_0$  de  $\overline{D(A)}$  on a l'équivalence des propriétés suivantes :

1)  $u_0 \in D_{\alpha, p}$

14)  $t^{1-\alpha} \left\| \frac{d^+}{dt} S(t)u_0 \right\| \in L_*^p(0, 1)$  .

Démonstration .

Toute  $\ell$  - solution est stable par translation .

En effet on a le résultat suivant :



Lemme 4.4 [10] .

Pour  $h > 0$  , si  $u$  est  $\ell$ -solution sur  $[a, b[$  du problème de Cauchy homogène  $P(A, u_a, 0)$  alors  $v = u(\cdot + h)$  est  $\ell$ -solution sur  $[a, b-h[$  de  $P(A, u_{a+h}, 0)$  .  $\star$

Donc si  $u$  est  $\ell$ -solution sur  $[0, +\infty[$  de  $P(A, u_0, 0)$  , pour  $h > 0$   $v(t) = S(t)[S(h)u_0]$  est  $\ell$ -solution sur  $[0, +\infty[$  de  $P(A, S(h)u_0, 0)$ . Comme  $S(t)$  est un semi-groupe régularisant  $\forall h > 0$   $S(h)u_0 \in D(A)$  . On déduit alors de la proposition 4.2 :

$$\forall h > 0, \forall u_0 \in \overline{D(A)}, \forall t \geq 0$$

$$\frac{d^+}{dt} S(t)[S(h)u_0] + A^\circ S(t)[S(h)u_0] = 0$$

$$\text{donc} \quad \left\| \frac{d^+}{dt} S(t)[S(h)u_0] \right\| \leq |AS(t)[S(h)u_0]| \quad (1)$$

On sait que d'après les propriétés des semi-groupes (2-4) que :

$$\forall u_0 \in \overline{D(A)} \quad S(t)[S(h)u_0] = S(t+h)u_0 .$$

$$\text{On montre alors que } \frac{d^+}{dt} S(t)[S(h)u_0] = \frac{d^+}{dt} S(t+h)u_0 .$$

En effet soit  $b > 0$  ; on a :

$$\frac{S(t+b+h)u_0 - S(t+h)u_0}{b} = \frac{S(t+b)[S(h)u_0] - S(t)[S(h)u_0]}{b}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \frac{d^+}{dt} S(t)[S(h)u_0] &= \lim_{\substack{b \rightarrow 0 \\ b > 0}} \frac{S(t+b)[S(h)u_0] - S(t)[S(h)u_0]}{b} \\ &= \frac{d^+}{dt} S(t+h)u_0 \end{aligned} \quad (2)$$

Des relations (1) et (2) on obtient :

$$\forall h > 0, \forall t \geq 0, \forall u_0 \in \overline{D(A)} \quad \left\| \frac{d^+}{dt} S(t+h)u_0 \right\| \leq |AS(t+h)u_0|$$

$$\text{donc } \forall u_0 \in \overline{D(A)}, \forall t > 0 \quad \left\| \frac{d^+}{dt} S(t)u_0 \right\| \leq |AS(t)u_0| \quad (3)$$

i) De l'inégalité (3) et de la propriété 13) définie en 4.1 des semi-groupes régularisants on déduit :



$$\forall u_0 \in \overline{D(A)} \quad t^{1-\alpha} \left\| \frac{d^+}{dt} S(t) u_0 \right\| \leq C_2 t^{1-\alpha} \|A_t u_0\|$$

si  $u_0 \in D_{\alpha, p}$  on a  $t^{1-\alpha} \|A_t u_0\| \in L_*^p(0, 1)$  et donc

$$t^{1-\alpha} \left\| \frac{d^+}{dt} S(t) u_0 \right\| \in L_*^p(0, 1) .$$

ii) Pour montrer que 14)  $\Rightarrow$  1) on applique l'inégalité (4) du lemme de Hardy 1.7 avec  $\gamma = \alpha$ ,  $r = p$  et  $\psi(s) = s \left\| \frac{d^+}{dt} S(s) u_0 \right\|$ .

Il vient :

$$t^{-\alpha} \int_0^t \left\| \frac{d^+}{dt} S(s) u_0 \right\| ds \in L_*^p(0, 1) \quad (4)$$

$$\text{Or } \|u_0 - S(t) u_0\| \leq \int_0^t \left\| \frac{d}{dt} S(s) u_0 \right\| ds = \int_0^t \left\| \frac{d^+}{dt} S(s) u_0 \right\| ds$$

et d'après (4) il est immédiat que  $t^{1-\alpha} \|u_0 - S(t) u_0\| \in L_*^p(0, 1)$ .

Du théorème 2.10 on déduit que  $u_0 \in D_{\alpha, p}$ .

#### Proposition 4.5.

Soit  $X$  un espace de Banach uniformément convexe ainsi que son dual,  $A$  un opérateur  $m$ -accrétif tel que le semi-groupe associé à l'opérateur  $-A$  soit régularisant;  $\alpha$ ,  $p$  et  $q$  des réels tels que  $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{q}$ ,  $q < +\infty$ ,  $q \leq p$ . Pour tout  $u_0$  élément de  $D(A)$  on a l'équivalence entre les propriétés suivantes :

$$1) \quad u_0 \in D_{\alpha, p}$$

$$15) \quad \left[ h^{(1-\alpha)q-1} \int_h^1 \left\| \frac{d^+}{dt} S(t) u_0 \right\|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \in L_*^p(0, 1)$$

$$16) \quad \left[ \frac{1}{h^{1+\alpha q}} \int_h^1 \|S(t) u_0 - S(t-h) u_0\|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \in L_*^p(0, 1) .$$



Démonstration .

a) On montre que  $1) \Rightarrow 15)$  . On utilise l'inégalité (5) du lemme de Hardy 1.7 avec  $\gamma = (1 - \alpha)q - 1$  ,  $r = \frac{p}{q}$  et  $\psi(s) = s \left\| \frac{d^+}{dt} S(s) u_0 \right\|^q$  . On remarque que la condition  $0 \leq \alpha < 1 - \frac{1}{q}$  permet d'affirmer que  $\gamma > 0$  . Il faut montrer que  $s^\gamma \psi(s) \in L_*^q(0, 1)$  .

$$s^\gamma \psi(s) = s^{(1-\alpha)q} \left\| \frac{d^+}{dt} S(s) u_0 \right\|^q = \left[ s^{1-\alpha} \left\| \frac{d^+}{dt} S(s) u_0 \right\| \right]^q$$

$$s^\gamma \psi(s) \in L_*^q(0, 1) \Leftrightarrow s^{1-\alpha} \left\| \frac{d^+}{dt} S(s) u_0 \right\| \in L_*^p(0, 1) .$$

Si  $u_0 \in D_{\alpha, p}$  d'après la proposition 4.3 on sait que  $s^{1-\alpha} \left\| \frac{d^+}{dt} S(s) u_0 \right\| \in L_*^p(0, 1)$  donc si  $u_0 \in D_{\alpha, p} \Rightarrow s^\gamma \psi(s) \in L_*^q(0, 1)$ . On obtient donc par application de l'inégalité (5) du lemme de Hardy 1.7 que :

$$h^\gamma \int_h^1 \psi(s) \frac{ds}{s} = h^{(1-\alpha)q-1} \int_h^1 \left\| \frac{d^+}{dt} S(t) u_0 \right\|^q dt \in L_*^q(0, 1)$$

$$\text{donc si } u_0 \in D_{\alpha, p} \Rightarrow \left[ h^{(1-\alpha)q-1} \int_h^1 \left\| \frac{d^+}{dt} S(t) u_0 \right\|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \in L_*^p(0, 1) .$$

b) Pour montrer que  $15) \Rightarrow 1)$  on a besoin du résultat suivant :

Lemme 4.6 .

Soit  $X$  un espace de Banach uniformément convexe ainsi que son dual ,  $A$  un opérateur  $m$ -accrétif tel que le semi-groupe associé à  $-A$  soit régularisant . Alors pour tout  $u_0$  élément de  $D(A)$  et tout  $h$  élément de  $]0, 1[$  les applications définies par :

$$t \in ]0, 1-h[ \quad \mapsto \quad \|S(t+h)u_0 - S(t)u_0\|$$

$$t \in ]0, 1[ \quad \mapsto \quad \left\| \frac{d^+}{dt} S(t) u_0 \right\|$$

sont décroissantes .      ★



Démonstration du lemme .

$\forall u_0 \in \overline{D(A)}$  ,  $\forall h \in ]0, 1[$  , p.p.  $t \in ]0, 1-h[$  comme le semi-groupe est régularisant on a :

$$\left( S(t)u_0 , -\frac{d}{dt}S(t)u_0 \right) \in G(A) \text{ et } \left( S(t+h)u_0 , -\frac{d}{dt}S(t+h)u_0 \right) \in G(A).$$

Or  $A$  est accréatif donc :

$$\exists w \in J\left(S(t+h)u_0 - S(t)u_0\right) \text{ tel que } \langle w , -\frac{d}{dt}[S(t+h)u_0 - S(t)u_0] \rangle_{X', X} \geq 0$$

$$\text{soit } \langle w , \frac{d}{dt}(S(t+h)u_0 - S(t)u_0) \rangle_{X', X} \leq 0 \quad (1)$$

Lemme 4.7 [2] .

Soit  $u$  une application de  $D(u) \subset \mathbb{R}$  à valeurs dans  $X$  espace de Banach réel, si  $u$  est faiblement dérivable en  $t_0$  et si  $\|u\| : t \mapsto \|u(t)\|$  est dérivable en  $t_0$  alors on a :

$$\forall w \in J(u(t_0)) \quad \langle w , \frac{d}{dt}u(t_0) \rangle_{X', X} = \frac{d}{dt} \|u\|(t_0) . \quad \star$$

i) Le semi-groupe associé à  $-A$  étant régularisant

$\forall t_0 > 0$   $t \in [t_0, +\infty[ \mapsto S(t)u_0$  est lipschitzienne dans un espace de Banach réflexif , on en déduit que p.p.  $t \in ]0, +\infty[$   $S(t)u_0$  est dérivable. Le lemme 4.7 permet d'écrire p.p.  $t \in ]0, 1[$

$$\forall w \in J\left(S(t+h)u_0 - S(t)u_0\right)$$

$$\frac{d}{dt} \|S(t+h)u_0 - S(t)u_0\| = \langle w , \frac{d}{dt}(S(t+h)u_0 - S(t)u_0) \rangle_{X', X} \quad (2)$$

Des relations (1) et (2) on déduit :

$$\text{p.p. } t \in ]0, 1-h[ \quad \frac{d}{dt} \|S(t+h)u_0 - S(t)u_0\| \leq 0 \quad (3)$$

$$\forall t_1 \in ]0, 1[ \quad \forall t \in [t_1, 1-h] \text{ on pose } \varphi(t) = \|S(t+h)u_0 - S(t)u_0\| .$$

$\varphi$  est lipschitzienne en  $[t_1, 1-h]$  donc absolument continue et

$$\forall (t, t') \in [t_1, 1-h]^2 \quad t' < t \quad \varphi(t) - \varphi(t') = \int_{t'}^t \frac{d}{dt} \varphi(\xi) d\xi .$$



De (3) on déduit que pour  $t' < t, \varphi(t) - \varphi(t') \leq 0$  donc  $\forall t_1 \in ]0, 1[$   $\varphi$  est décroissante sur  $[t_1, 1-h]$  donc sur  $]0, 1-h[$ . On a ainsi montré la décroissance de l'application  $t \in ]0, 1-h[ \mapsto \|S(t+h)u_0 - S(t)u_0\|$ .

ii) Soit deux réels  $s$  et  $t$  tels que  $0 < s \leq t < 1$ .

On a :

$$\|S(t+h)u_0 - S(t)u_0\| \leq \|S(s+h)u_0 - S(s)u_0\|$$

et comme  $t \mapsto S(t)u_0$  est dérivable à droite on en déduit que :

$$\left\| \frac{d^+}{dt} S(t)u_0 \right\| \leq \left\| \frac{d^+}{dt} S(s)u_0 \right\|$$

ce qui montre la décroissance de l'application  $t \in ]0, 1[ \mapsto \left\| \frac{d^+}{dt} S(t)u_0 \right\|$ .

★

Pour montrer que 15)  $\Rightarrow$  1) on utilise le lemme 4.6 et plus particulièrement la décroissance de l'application

$$t \in ]0, 1[ \mapsto \left\| \frac{d^+}{dt} S(t)u_0 \right\|.$$

$$\text{Soit } 0 \leq h \leq \frac{1}{2}.$$

$$\int_h^{2h} \left\| \frac{d^+}{dt} S(t)u_0 \right\|^q dt \geq \int_h^{2h} \left\| \frac{d^+}{dt} S(2h)u_0 \right\|^q dt = h \left\| \frac{d^+}{dt} S(2h)u_0 \right\|^q.$$

$$\text{Comme } \int_h^1 \left\| \frac{d^+}{dt} S(t)u_0 \right\|^q dt \geq \int_h^{2h} \left\| \frac{d^+}{dt} S(t)u_0 \right\|^q dt \geq h \left\| \frac{d^+}{dt} S(2h)u_0 \right\|^q$$

on obtient :

$$\left[ h^{(1-\alpha)q-1} \int_h^1 \left\| \frac{d^+}{dt} S(t)u_0 \right\|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \geq \left[ h^{(1-\alpha)q-1} h \left\| \frac{d^+}{dt} S(2h)u_0 \right\|^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

soit :

$$h^{1-\alpha} \left\| \frac{d^+}{dt} S(2h)u_0 \right\| \leq \left[ h^{(1-\alpha)q-1} \int_h^1 \left\| \frac{d^+}{dt} S(t)u_0 \right\|^q dt \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\text{donc } 15) \Rightarrow h^{1-\alpha} \left\| \frac{d^+}{dt} S(2h)u_0 \right\| \in L_*^p(0, \frac{1}{2})$$

et par changement de variable en posant  $t = 2h$  on montre



$$15) \Rightarrow t^{1-\alpha} \left\| \frac{d^+}{dt} S(t) u_0 \right\| \in L_*^p(0, 1)$$

ce qui montre d'après la proposition 4.3 que  $u_0 \in D_{\alpha, p}$ .

c) On montre que 1)  $\Rightarrow$  16) .

i) Soit  $0 \leq h \leq \frac{1}{2}$ . On a :

$$\begin{aligned} \int_h^1 \|S(t) u_0 - S(t-h) u_0\|^q dt &= \int_h^{2h} \|S(t) u_0 - S(t-h) u_0\|^q dt + \\ &+ \int_{2h}^1 \|S(t) u_0 - S(t-h) u_0\|^q dt . \end{aligned}$$

Du lemme 4.6 on déduit que l'application  $t \in [h, 1] \mapsto \|S(t) u_0 - S(t-h) u_0\|$  est décroissante d'où :

$$\int_h^1 \|S(t) u_0 - S(t-h) u_0\|^q dt \leq h \|u_0 - S(h) u_0\|^q + \int_{2h}^1 \|S(t) u_0 - S(t-h) u_0\|^q dt$$

$$\frac{1}{h^{1+\alpha q}} \int_h^1 \|S(t) u_0 - S(t-h) u_0\|^q dt \leq$$

$$\leq h^{-\alpha q} \|u_0 - S(h) u_0\|^q + \frac{1}{h^{1+\alpha q}} \int_{2h}^1 \|S(t) u_0 - S(t-h) u_0\|^q dt .$$

Or on sait que  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \quad \forall q \in [1, +\infty[ \quad (a+b)^{\frac{1}{q}} \leq a^{\frac{1}{q}} + b^{\frac{1}{q}}$

d'où :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{h^{1+\alpha q}} \int_h^1 \|S(t) u_0 - S(t-h) u_0\|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} &\leq \\ &\leq h^{-\alpha} \|u_0 - S(h) u_0\| + \left[ \frac{1}{h^{1+\alpha q}} \int_{2h}^1 \|S(t) u_0 - S(t-h) u_0\|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} . \end{aligned}$$

Du théorème 2.10 on déduit que  $u_0 \in D_{\alpha, p} \Rightarrow h^{-\alpha} \|S(h) u_0 - u_0\| \in L_*^p(0, \frac{1}{2})$

donc pour montrer que 1)  $\Rightarrow$  14) il suffit de vérifier que :



$$\left[ \frac{1}{h^{1+\alpha q}} \int_{2h}^1 \|S(t)u_0 - S(t-h)u_0\|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \in L_*^p(0, \frac{1}{2}).$$

Si  $t-h > 0$  l'application  $\xi \in [t-h, t] \mapsto S(\xi)u_0$  est lipschitzienne ; donc on peut écrire :

$$S(t)u_0 - S(t-h)u_0 = \int_{t-h}^t \frac{d}{dt} S(\xi)u_0 d\xi.$$

De l'inégalité de Hölder on déduit avec  $q$  et  $q'$  deux réels tels que  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$

$$\int_{t-h}^t \left\| \frac{d}{dt} S(s)u_0 \right\| ds \leq \left[ \int_{t-h}^t |1|^{q'} ds \right]^{\frac{1}{q'}} \times \left[ \int_{t-h}^t \left\| \frac{d}{dt} S(s)u_0 \right\|^q ds \right]^{\frac{1}{q}}$$

donc :

$$\|S(t)u_0 - S(t-h)u_0\| \leq h^{\frac{1}{q'}} \left[ \int_{t-h}^t \left\| \frac{d}{dt} S(s)u_0 \right\|^q ds \right]^{\frac{1}{q}}$$

soit :

$$\|S(t)u_0 - S(t-h)u_0\|^q \leq h^{\frac{q}{q'}} \int_{t-h}^t \left\| \frac{d}{dt} S(s)u_0 \right\|^q ds.$$

Or comme  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$  il est immédiat que  $\frac{q}{q'} = q - 1$  d'où :

$$\|S(t)u_0 - S(t-h)u_0\|^q \leq h^{q-1} \int_{t-h}^t \left\| \frac{d}{dt} S(s)u_0 \right\|^q ds.$$

On pose  $\Phi(t) = \int_t^1 \left\| \frac{d}{dt} S(s)u_0 \right\|^q ds$ . On a :

$$\int_{t-h}^t \left\| \frac{d}{dt} S(s)u_0 \right\|^q ds = -\Phi(t) + \Phi(t-h)$$

$$\frac{1}{h^{q-1}} \int_{2h}^1 \|S(t)u_0 - S(t-h)u_0\|^q dt \leq \int_{2h}^1 [\Phi(t-h) - \Phi(t)] dt.$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \int_{2h}^1 [\Phi(t-h) - \Phi(t)] dt &= \int_{2h}^1 \Phi(t-h) dt - \int_{2h}^1 \Phi(t) dt = \int_h^{1-h} \Phi(t) dt - \int_{2h}^1 \Phi(t) dt \\ &= \int_h^{2h} \Phi(t) dt - \int_{1-h}^1 \Phi(t) dt. \end{aligned}$$



Or  $\Phi(t) \geq 0$  et  $\Phi$  est décroissante d'où :

$$\int_h^{2h} \Phi(t) dt - \int_{1-h}^1 \Phi(t) dt \leq h \Phi(h)$$

donc :

$$\frac{1}{h^{q-1}} \int_{2h}^1 \|S(t)u_0 - S(t-h)u_0\|^q dt \leq h \Phi(h)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{h^{1+\alpha q}} \int_{2h}^1 \|S(t)u_0 - S(t-h)u_0\|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} &\leq \\ &\leq \left[ h^{(1-\alpha)q-1} \int_h^1 \left\| \frac{d}{dt} S(s)u_0 \right\| ds \right]^{\frac{1}{q}} . \end{aligned}$$

Or on a montré que 1)  $\Rightarrow$  15) donc si  $u_0 \in D_{\alpha,p}$  il est immédiat que :

$$\left[ \frac{1}{h^{1+\alpha q}} \int_{2h}^1 \|S(t)u_0 - S(t-h)u_0\|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \in L_*^p(0, \frac{1}{2}) .$$

On a donc montré que 1)  $\Rightarrow$  16) lorsque  $h \in [0, \frac{1}{2}]$  .

$$\text{ii) } h > \frac{1}{2} .$$

On a :

$$\int_h^1 \|S(t)u_0 - S(t-h)u_0\|^q dt \leq h \|u_0 - S(h)u_0\|^q$$

donc :

$$\left[ \frac{1}{h^{1+\alpha q}} \int_h^1 \|S(t)u_0 - S(t-h)u_0\|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \leq h^{-\alpha} \|u_0 - S(h)u_0\| .$$

Du lemme 2.10 on déduit que si  $u_0 \in D_{\alpha,p}$  alors  $h^{-\alpha} \|u_0 - S(h)u_0\| \in L_*^p(\frac{1}{2}, 1)$

donc :

$$\left[ \frac{1}{h^{1+\alpha q}} \int_h^1 \|S(t)u_0 - S(t-h)u_0\|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \in L_*^p(\frac{1}{2}, 1)$$

ce qui achève de montrer que 1)  $\Rightarrow$  16) .



d) On montre que 16)  $\Rightarrow$  1)

i) On sait que pour  $0 \leq h \leq \frac{1}{2}$  on a :

$$\int_h^1 \|S(t)u_0 - S(t-h)u_0\|^q dt = \int_h^{2h} \|S(t)u_0 - S(t-h)u_0\|^q dt + \\ + \int_{2h}^1 \|S(t)u_0 - S(t-h)u_0\|^q dt .$$

De la décroissance de la fonction  $t \in ]t-h, 1[ \mapsto \|S(t)u_0 - S(t-h)u_0\|$  on déduit :

$$h \|S(2h)u_0 - S(h)u_0\|^q \leq \int_h^1 \|S(t)u_0 - S(t-h)u_0\|^q dt \quad (1)$$

Soit  $u_0$  vérifiant 16) ; on peut écrire :

$$\left[ \frac{1}{h^{1+\alpha q}} \int_h^1 \|S(t)u_0 - S(t-h)u_0\|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \in L_*^p(0, \frac{1}{2})$$

soit :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{h^{\frac{p}{q} + \alpha p}} \left[ \int_h^1 \|S(t)u_0 - S(t-h)u_0\|^q dt \right]^{\frac{p}{q}} \frac{dh}{h} < +\infty$$

donc d'après (1) on a :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{h^{\frac{p}{q} + \alpha p}} h^{\frac{p}{q}} \|S(2h)u_0 - S(h)u_0\|^p \frac{dh}{h} < +\infty$$

soit :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} [h^{-\alpha} \|S(2h)u_0 - S(h)u_0\|]^p \frac{dh}{h} < +\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h^{-\alpha} \|S(2h)u_0 - S(h)u_0\| \in L_*^p(0, \frac{1}{2})$$

donc 16)  $\Rightarrow h^{-\alpha} \|S(2h)u_0 - S(h)u_0\| \in L_*^p(0, \frac{1}{2})$  .

Pour conclure on utilise la proposition suivante . ★



Proposition 4.8 .

Soit  $X$  un espace de Banach ,  $A$  un opérateur  $m$ -accrétif de  $X$  . Pour tout  $u_0$  de  $\overline{D(A)}$  les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1)  $u_0 \in D_{\alpha, p}$
- 17)  $t^{-\alpha} \|S(2t)u_0 - S(t)u_0\| \in L_*^p(0, 1)$
- 18)  $t^{-\alpha} \|J_{2t}u_0 - J_tu_0\| \in L_*^p(0, 1)$  .

Démonstration .

Pour montrer que 1)  $\Rightarrow$  17) et 1)  $\Rightarrow$  18) il suffit de remarquer que :

$$\|S(2t)u_0 - S(t)u_0\| \leq \|S(2t)u_0 - u_0\| + \|S(t)u_0 - u_0\| .$$

Si  $u_0 \in D_{\alpha, p}$  on a  $t^{-\alpha} \|S(t)u_0 - u_0\| \in L_*^p(0, 1)$  et par changement de variable on montre que  $t^{-\alpha} \|S(2t)u_0 - u_0\| \in L_*^p(0, \frac{1}{2})$  donc  $u_0$  vérifie 17) . On montre de la même façon que 1)  $\Rightarrow$  18) .

Pour établir la réciproque il faut utiliser un lemme de D. Brézis [4] .

Lemme 4.9 .

Soient  $F$  et  $G$  deux fonctions positives sur  $]0, 1[$  telles que  $F \in L_{loc}^p(0, 1)$  ,  $F(t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow 0$  et

$$F(t) \leq F\left(\frac{t}{2}\right) + G(t) \quad \forall t \in ]0, 1[ .$$

Soient  $\gamma > 0$   $1 \leq p \leq +\infty$  si  $t^{-\gamma} G(t) \in L_*^p(0, 1)$  alors :

$$t^{-\gamma} F(t) \in L_*^p(0, 1) . \quad \star$$

On applique le lemme 4.9 avec  $\gamma = \alpha$  ,  $F(t) = \|S(2t)u_0 - u_0\|$  et  $G(t) = \|S(2t)u_0 - S(t)u_0\|$  et on en déduit que 1)  $\Rightarrow$  17) .  $\star$



Théorème 4.10 .

Soit  $X$  un espace de Banach uniformément convexe ainsi que son dual ,  $A$  un opérateur  $m$ -accréatif tel que le semi-groupe associé à  $-A$  soit régularisant ;  $\alpha$  et  $p$  des réels tels que  $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{p}$  ,  $p < +\infty$  .  
 Pour tout  $u_0$  élément de  $D(A)$  on a l'équivalence entre les propriétés suivantes :

$$1) \quad u_0 \in D_{\alpha, p}$$

$$19) \quad S(t)u_0 \in W^{\alpha + \frac{1}{p}; p}(0, 1)$$

où  $W^{\sigma, p}(0, 1)$  pour  $0 < \sigma < 1$  désigne l'ensemble des fonctions mesurables  $u : ]0, 1[ \rightarrow X$  telles que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\|u(x) - u(y)\|^p}{|x-y|^{1+\sigma p}} dx dy < +\infty .$$

Démonstration .

$$\text{Soit } f(x, y) = \frac{\|u(x) - u(y)\|^p}{|x-y|^{1+\alpha p}} .$$

On a  $f(x, y) = f(y, x)$  ; donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy &= 2 \int_0^1 \left[ \int_0^x \frac{\|u(x) - u(x-z)\|^p}{|z|^{1+\sigma p}} dz \right] dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{|z|^{1+\alpha p}} \left[ \int_z^1 \|u(x) - u(x-z)\|^p dx \right] dz . \end{aligned}$$

D'après la proposition 4.5 on a l'équivalence entre 1) et 16) et en particulier pour  $p = q$  on a :



$$u_0 \in D_{\alpha, p} \Leftrightarrow \frac{1}{z^{1+\alpha p}} \int_z^1 \|S(t)u_0 - S(t-z)u_0\|^p dt \in L_*^p(0,1) \quad .$$

Or  $\alpha$  est tel que  $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{p}$  ; donc en posant  $\sigma = \frac{1}{p} + \alpha$  on obtient l'équivalence entre les propriétés 1) et 19) .  $\star$



## CHAPITRE V

### APPLICATION

#### Partie A : Accrétivité dans certains espaces d'Orlicz .

On appelle fonction de Young toute application  $M$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^+$  convexe , paire , dont la restriction à  $\mathbb{R}^+$  est injective et qui vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{M(t)}{t} = 0 \qquad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M(t)}{t} = +\infty .$$

La fonction  $N$  polaire de  $M$  , paire et définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $N(s) = \sup_{t \geq 0} [st - M(t)]$  est aussi une fonction de Young .

On peut citer comme exemple :

$$T_p : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{|t|^p}{p} \quad p > 1$$

qui admet pour polaire  $T_q$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  .

Soit  $\Omega$  un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$  .

Si  $\mathfrak{M}(\Omega)$  désigne l'ensemble des ( classes de ) fonctions Lebesgue-mesurables sur  $\Omega$  on appelle classe d'Orlicz et on note  $C_M(\Omega)$  :

$$C_M(\Omega) = \left\{ u \in \mathfrak{M}(\Omega) / \int_{\Omega} M(u(x)) dx < +\infty \right\} .$$

C'est un ensemble convexe et équilibré . On lui associe deux espaces vectoriels , dits espaces d'Orlicz , l'un noté  $L_M(\Omega)$  qui est le plus petit espace vectoriel contenant  $C_M(\Omega)$  et qui est caractérisé par :

$$L_M(\Omega) = \left\{ u \in \mathfrak{M}(\Omega) / \exists \alpha u \in C_M(\Omega) \Leftrightarrow \int_{\Omega} M(\alpha u(x)) dx < +\infty \right\}$$



l'autre noté  $E_M(\Omega)$  qui est le plus grand espace vectoriel inclus dans la classe d'Orlicz et qui est caractérisé par :

$$E_M(\Omega) = \left\{ u \in \mathfrak{M}(\Omega) / \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha u \in C_M(\Omega) \Leftrightarrow \int_{\Omega} M(\alpha u(x)) dx < +\infty \right\} .$$

Ce sont des espaces de Banach pour la norme associée à la jauge de la classe d'Orlicz dite norme de Luxembourg :

$$\|u\|_M = \inf \left\{ k > 0 / \int_{\Omega} M\left(\frac{u(x)}{k}\right) dx \leq 1 \right\} .$$

La classe d'Orlicz est un espace vectoriel si et seulement si la fonction de Young  $M$  vérifie une condition dite  $\Delta_2$ -condition :

$\Delta_2$ -condition :  $\exists a > 0$  ,  $\exists b > 0$  ,  $\exists t_0 > 0$   $\exists t_1 > 0$

$$\forall t > t_1 \quad M(2t) \leq aM(t)$$

$$\forall t < t_0 \quad M(2t) \leq bM(t)$$

### Remarques .

1)  $T_p$  vérifie la  $\Delta_2$ -condition .

2) Si  $M$  vérifie la  $\Delta_2$ -condition , on a :

$$E_M(\Omega) = C_M(\Omega) = L_M(\Omega) .$$

3)  $E_{T_p} = L_p$  .

D'autre part nous avons le résultat suivant [ 8 ] :

### Proposition 5.1 .

Soient  $M$  et  $N$  deux fonctions de Young mutuellement polaires ,  $N$  vérifiant la  $\Delta_2$ -condition , si de plus la dérivée de  $M$  est continue alors la norme de Luxembourg est Gâteaux-différentiable sur  $E_M(\Omega)$  et son gradient est défini par la formule :

$$u \in E_M(\Omega) \longmapsto \Gamma u \quad \left( x \in \Omega \longmapsto \Gamma u(x) = \frac{M' \left( \frac{u(x)}{\|u\|_M} \right)}{\int_{\Omega} M' \left( \frac{u(x)}{\|u\|_M} \right) \frac{u(x)}{\|u\|_M} dx} \right)$$



Remarques .

4) En fait la norme de Luxembourg est différentiable sur  $E_M(\Omega)$  sous les hypothèses de la proposition 5.1 .

5) Si  $M$  est deux fois différentiable alors  $M'$  est croissante et  $M'(u)$  est du signe de  $u$  .

Proposition 5.2 .

Soit  $E_M(\Omega)$  l'espace d'Orlicz dont la fonction de Young vérifie les hypothèses de la proposition 5.1 .

L'opérateur  $A$  est accréatif sur  $E_M(\Omega)$  muni de la norme de Luxembourg si et seulement si on a :

$$\forall (u, v) \in \text{Gr}(A) \quad \forall (\hat{u}, \hat{v}) \in \text{Gr}(A)$$

$$\int_{\Omega} M' \left( \frac{u - \hat{u}}{\|u - \hat{u}\|_M} \right) (v - \hat{v}) \, dx \geq 0 \quad (1)$$

Démonstration .

D'après la définition 0.5 on sait que  $A$  est accréatif sur  $E_M(\Omega)$  si et seulement si :

$$\tau(u - \hat{u}, v - \hat{v}) \geq 0$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\|u - \hat{u} + \lambda(v - \hat{v})\|_M - \|u - \hat{u}\|_M}{\lambda} \geq 0$$

Si la norme de Luxembourg est Gâteaux-différentiable on a :

$$\forall (u, v) \in E_M^2(\Omega) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|u + tv\| - \|u\|}{t} = \langle \Gamma(u), v \rangle_{E_M', E_M}$$

d'où :



$$\tau(u - \hat{u}, v - \hat{v}) = \frac{\int_{\Omega} M' \left( \frac{u - \hat{u}}{\|u - \hat{u}\|_M} \right) (v - \hat{v})}{\int_{\Omega} M' \left( \frac{u - \hat{u}}{\|u - \hat{u}\|_M} \right) \frac{u - \hat{u}}{\|u - \hat{u}\|_M} dx} dx$$

On suppose  $u \neq \hat{u}$  donc  $\|u - \hat{u}\|_M \neq 0$ .

De la remarque 5 on déduit que :

$$\int_{\Omega} M' \left( \frac{u - \hat{u}}{\|u - \hat{u}\|_M} \right) \frac{u - \hat{u}}{\|u - \hat{u}\|_M} dx > 0$$

donc  $A$  est accréatif sur  $E_M(\Omega)$  si et seulement si

$$\int_{\Omega} M' \left( \frac{u - \hat{u}}{\|u - \hat{u}\|_M} \right) (v - \hat{v}) dx \geq 0.$$

### Remarque.

Si  $M = T_p$  on a bien la caractérisation de l'accréativité annoncée dans le cours de Bénéilan ([2]) car  $T'_p(u) = u|u|^{p-2}$  permet encore d'éliminer de la formule (1) le terme en  $\|u - \hat{u}\|_M \|u - \hat{u}\|_M^{p-2}$  qui est un dénominateur.

### Proposition 5.3.

Soit  $E_M(\Omega)$  l'espace d'Orlicz dont la fonction de Young  $M$  vérifie les hypothèses de la proposition 5.1 ; soit  $r$  un réel tel que l'application :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto t|t|^r$$

soit croissante.

Alors l'opérateur de domaine  $D(A) \subset E_M(\Omega)$  tel que :

$$u \in E_M(\Omega) \mapsto A_r u \in E_M(\Omega) \quad (x \in \Omega \mapsto u(x) |u(x)|^r)$$

est un opérateur accréatif.



Démonstration .

On utilise la croissance de l'application  $t \mapsto t|t|^r$  et la proposition 5.2 en remarquant que  $M' \left( \frac{u - \hat{u}}{\|u - \hat{u}\|_M} \right)$  est du signe de  $(u - \hat{u})$  .

Partie B :      Caractérisation d'ensembles intermédiaires .

La caractérisation des ensembles intermédiaires par la méthode des sommes permet dans certains cas d'identifier les ensembles  $D_{\alpha, p}$  à des espaces d'interpolations linéaires .

Etant donné une fonction de Young  $M$  ,  $q$  un réel supérieur ou égal à 2 on notera :

$$A_q : u \in E_M(\Omega) \mapsto A_q u \in E_M(\Omega) \quad (x \in \Omega \mapsto u(x) |u(x)|^{q-2})$$

Proposition 5.4.

Si la fonction de Young  $M$  vérifie les hypothèses de la proposition 5.1 alors l'opérateur  $A_q$  est un opérateur  $m$ -accrétif dans  $E_M(\Omega)$  muni de la norme de Luxembourg .

Démonstration .

L'accrétivité de l'opérateur  $A_q$  se déduit de la proposition 5.3 avec  $r = q-2$  . Pour montrer la  $m$ -accrétivité on utilise le résultat suivant :

Lemme 5.7 [ 2 ] .

Soit  $X$  un espace de Banach réel .

Un opérateur accrétif  $A$  est  $m$ -accrétif si et seulement si :

$$\forall \lambda > 0 \quad R(1 + \lambda A) = X \quad . \quad \star$$



Pour montrer que l'opérateur  $A_q$  est  $m$ -accrétif sur  $E_M(\Omega)$  il suffit de vérifier que  $R(1 + A_q) = E_M(\Omega)$  c'est-à-dire que :

$$\forall u \in E_M(\Omega) \quad \exists v \in E_M(\Omega) \quad (1 + A_q)v = u$$

$$\forall x \in \Omega \quad [(1 + A_q)v] = v(x) \quad (1 + |v(x)|^{q-2}) = u(x) .$$

On remarque que  $u(x)$  et  $v(x)$  sont de même signe .

Soit  $u$  un élément quelconque fixé de  $E_M(\Omega)$  . On peut écrire :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \text{ avec } \Omega_1 = \{x \in \Omega / u(x) \geq 0\} \text{ et } \Omega_2 = \{x \in \Omega / u(x) < 0\} .$$

On considère la fonction  $g : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t + t^{q-1}$  ,  $g$  est croissante , continue de  $\mathbb{R}^+$  sur  $\mathbb{R}^+$  , elle réalise une bijection des réels positifs sur lui-même et on a :  $\forall x \in \Omega_1 \quad g(v(x)) = u(x)$  .

Pour  $x \in \Omega_1$   $u(x) \geq 0$  donc  $v(x) \geq 0$  . Or  $1 + |v(x)|^{q-2} \geq 1$  donc  $0 \leq v(x) \leq u(x)$  et comme  $u \in E_M(\Omega)$  il est immédiat que  $v \in E_M(\Omega)$  . On a donc montré :

$$\forall u \in E_M(\Omega) \quad \exists v /_{\Omega_1} \in E_M(\Omega) / (1 + A_q) v /_{\Omega_1} = u /_{\Omega_1} .$$

En considérant la fonction  $h : t \in \mathbb{R}^- \mapsto t + |t|^{q-2}t$  on obtient un résultat identique sur  $\Omega_2$  . On en déduit que  $R(1 + A) = E_M(\Omega)$  et d'après le lemme 5.7 cela prouve que l'opérateur  $A_q$  est  $m$ -accrétif sur  $E_M(\Omega)$ . ★

On choisit  $M = T_r$  pour  $r \in [1, +\infty[$  . On sait alors que  $E_M(\Omega) = L^r(\Omega)$  .  $D_{\alpha, p}(A_q)$  coïncide dans ce cas avec un espace de Lorentz ( pour la définition des espaces de Lorentz , c.f. par exemple Butzer et Berens [7] ) qui est un espace d'interpolation au sens de l'interpolation linéaire et plus précisément avec ( cf. Lions et Peetre [9] ) :

$$L^{s, t}(\Omega) = \left( L^r(\Omega) , L^{r(q-1)}(\Omega) \right)_{\theta, t}$$

$$\text{avec } \theta = \frac{\alpha(q-1)}{1 + \alpha(q-2)} \quad \text{et} \quad t = p(1 + \alpha(q-2)) .$$

On établit alors le résultat suivant :



Théorème 5.8.

Soient les réels  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $p \in ]1, +\infty[$ ,  $q \in [2, +\infty[$  et  $r \in [1, +\infty[$ . On a :

$$D_{\alpha, p}(A_q) = L^{s, t}(\Omega)$$

avec  $s = 2(1 + \alpha(q-2))$  et  $t = p(1 + \alpha(q-2))$ .

Démonstration.

De la proposition 1.12 on déduit que  $u_0 \in D_{\alpha, p}(A_q)$  équivaut à  $\exists v_1(t), v_2(t)$  fonctions mesurables de  $[0, 1]$  dans  $L^r(\Omega)$ ,

$u_0 = v_1(t) + v_2(t)$  p.p.  $t \in ]0, 1[$  telles que  $v_1(t) \in D(A)$  p.p.  $t \in ]0, 1[$  :

$$t^{1-\alpha} \|A_q v_1(t)\|_{L^r(\Omega)} \in L_*^p(0, 1)$$

$$t^{1-\alpha} \|v_2(t)\|_{L^r(\Omega)} \in L_*^p(0, 1) .$$

On montre que :

$$t^{1-\alpha} \|A_q v_1(t)\|_{L^r(\Omega)} \in L_*^p(0, 1) \Leftrightarrow t^{\frac{1-\alpha}{q-1}} \|v_1(t)\|_{L^{r(q-1)}(\Omega)} \in L_*^{p(q-1)}(0, 1)$$

En effet :

$$t^{1-\alpha} \|A_q v_1(t)\|_{L^r(\Omega)} \in L_*^p(0, 1) \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \int_0^1 t^{(1-\alpha)p} \|A_q v_1(t)\|_{L^r(\Omega)}^p \frac{dt}{t} < +\infty .$$

$$\text{Or } \|A_q v_1(t)\|_{L^r(\Omega)} = \left[ \int |v_1(t, x)|^{(q-1)r} dx \right]^{\frac{1}{r}}$$

$$(1) \Leftrightarrow \int_0^1 t^{(1-\alpha)p} \left[ \int_{\Omega} |v_1(t, x)|^{r(q-1)} dx \right]^{\frac{p}{r}} \frac{dt}{t} < +\infty$$

$$(1) \Leftrightarrow \int_0^1 \left[ t^{\frac{1-\alpha}{q-1}} \|v_1(t)\|_{L^{r(q-1)}(\Omega)} \right]^{p(q-1)} \frac{dt}{t} < +\infty$$



$$(1) \Rightarrow t^{\frac{1-\alpha}{q-1}} \|v_1(t)\|_{L^{r(q-1)}(\Omega)} \in L_*^{p(q-1)}(0,1) .$$

On a donc

$$t^{-\alpha} \|v_2(t)\|_{L^r(\Omega)} \in L_*^p(\Omega)$$

et

$$t^{\frac{1-\alpha}{q-1}} \|v_1(t)\|_{L^{r(q-1)}(\Omega)} \in L_*^{p(q-1)}(0,1) .$$

On déduit alors que :

$$u_o \in \left( L^r(\Omega) , L^{r(q-1)}(\Omega) \right)_{\theta, t}$$

$$\text{avec } \theta = \frac{\alpha(q-1)}{1 + \alpha(q-2)} \quad \text{et} \quad t = p(1 + \alpha(q-2))$$

c'est-à-dire que  $u_o \in L^{s,t}(\Omega)$  . On a donc montré que :

$$D_{\alpha, p}(A_q) = L^{s,t}(\Omega) \quad . \quad \star$$

Si l'on se plaçait dans le cas général des espaces d'Orlicz  $E_M(\Omega)$  on introduirait de cette façon de nouveaux ensembles . On pourrait également envisager d'étudier avec plus de précision les ensembles d'interpolation associés à un opérateur différentiel .



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARBU (V.) :  
Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces .  
( Noordhoff Internat. Publ. 1976 ) .
- [2] BENILAN (Ph. ) :  
Cours de 3<sup>eme</sup> cycle . ( Université de Besançon 1975 ) .
- [3] BOURBAKI (N.) :  
Espaces vectoriels topologiques ( Hermann ) .
- [4] BREZIS ( David ) :  
Interpolation et opérateurs non linéaires .  
( Thèse Paris VI 1974 ) .
- [5] BREZIS ( Haim ) :  
Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions  
dans les espaces de Hilbert .  
( North-Holland mathematics Studies 1973 ) .
- [6] BREZIS ( Haim ) :  
New results concerning monotone operators and nonlinear semi -  
groups .  
( Analysis of Nonlinear Problems , RIMS , 1974 p. 2-27 ) .
- [7] BUTZER ( P.L. ) - BERENS ( H. ) :  
Semi-groups of operators and approximation .  
( Springer 1967 ) .
- [8] KRASNOSELSKII ( M.A. ) - RUTICKII ( Y.B. ) :  
Convex functions and Orlicz spaces .  
( Noordhoff 1961 ) .
- [9] LIONS ( J.L. ) - PEETRE ( J. ) :  
Sur une classe d'espaces d'interpolation .  
( Institut des Hautes Etudes Scientifiques - Publications mathéma -  
tiques , 19 , 1964 , p. 5-68 ) .



[10] PIERRE ( M. ) :

Thèse de 3<sup>e</sup> cycle . ( Université de Paris VI 1976 ) .

[11] ROBERT ( J. ) :

Cours de 3<sup>e</sup> cycle . ( Université de Besançon 1976 ) .





